



P U L S A R S

CORRECTION INDÉPENDANTE

Centrale-Supélec 2026 — Mathématiques 2 (TSI)

SESSION	NIVEAU	DURÉE	FILIÈRES
2026	CPGE	—	TSI

Correction indépendante rédigée par Pulsars. Elle n'est ni officielle ni affiliée à l'organisateur du concours. Les énoncés ne sont pas reproduits : le sujet officiel reste consultable sur le site du concours.

Partie A · I — Le cas $n = 2$ (Q1, Q2)

$u(P) = P(X+1)$ et $v(P) = P(X-1)$ sur $R_n[X]$.

- **Q1** — u est un endomorphisme de $R_2[X]$; sa matrice dans la base canonique.

Q1. La linéarité est immédiate : $(\lambda P + Q)(X+1) = \lambda P(X+1) + Q(X+1)$.

La substitution $X \mapsto X + 1$ ne change pas le degré — le terme dominant reste $a_d X^d$ —, donc $u(R_2[X]) \subset R_2[X]$: u est bien un **endomorphisme**.

Calculons les images des vecteurs de base :

$$u(1) = 1, \quad u(X) = X + 1, \quad u(X^2) = (X+1)^2 = X^2 + 2X + 1.$$

En rangeant les coordonnées en colonnes :

$$\text{Mat}_e(u) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- **Q2** — cette matrice est inversible ; son inverse, son spectre, sa diagonalisabilité.

Q2. La matrice est **triangulaire supérieure à diagonale unité**, donc de déterminant $1 \neq 0$: elle est **inversible**.

Son inverse est la matrice de v , puisque $u \circ v = \text{id}$ (voir **Q4**) :

$$v(1) = 1, \quad v(X) = X - 1, \quad v(X^2) = X^2 - 2X + 1, \text{ d'où } \\ \text{Mat}_e(v) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le spectre se lit sur la diagonale : $\text{Sp} = \{1\}$, valeur propre triple.

La matrice n'est pas diagonalisable. Si elle l'était, étant semblable à la matrice diagonale de ses valeurs propres — c'est-à-dire à I_3 —, elle serait égale à I_3 : $P I_3 P^{-1} = I_3$. Or elle en diffère.

Partie A · II — Des matrices semblables à leurs inverses (Q3 à Q7)

U est la matrice de u dans la base canonique de $R_n[X]$.

- **Q3** — U est triangulaire supérieure de coefficients binomiaux ; est-elle diagonalisable ?

Q3. La formule du binôme donne

$$u(X^j) = (X+1)^j = \sum_{i=0}^j C(j, i) \cdot X^i.$$

La j -ième colonne de U a donc pour coefficients $C(j, i)$ pour $i \leq j$, et 0 au-delà : U est **triangulaire supérieure** et $U_{i,j} = C(j, i)$.

Sa diagonale est constituée des $C(j, j) = 1$: $\text{Sp}(U) = \{1\}$. Par le même argument qu'en **Q2**, U n'est pas diagonalisable dès que $n \geq 1$.

- **Q4** — $u \circ v$, l'inversibilité de U , et les coefficients de U^{-1} .
- **Q5, Q6** — la matrice D des signes alternés, et la similitude $U \sim U^{-1}$.

Q4. Pour tout P :

$$u(v(P)) = v(P)(X+1) = P((X+1) - 1) = P(X),$$

et symétriquement $v(u(P)) = P$. Donc $u \circ v = v \circ u = \text{id}$: u est **bijective**, de réciproque v , et U est inversible avec $U^{-1} = \text{Mat}_e(v)$.

La formule du binôme appliquée à $(X-1)^j$ donne

$$(U^{-1})_{i,j} = (-1)^{j-i} \cdot C(j, i).$$

C'est bien ce qu'on lit sur l'inverse calculé en **Q2**, dont les coefficients alternent en signe.

- **Q7** — le même résultat pour la matrice inférieure $L = U^T$.

Q7. Transposons l'égalité $U = DU^{-1}D$, en utilisant $D^T = D$ et $(U^{-1})^T = (U^T)^{-1}$:

$$L = U^T = D \cdot (U^T)^{-1} \cdot D = D \cdot L^{-1} \cdot D.$$

Donc L est elle aussi **semblable à son inverse**, via la même matrice D .

Q5. D est diagonale de coefficients ± 1 , donc

$$D^2 = \text{Diag}((-1)^{2i}) = I_{n+1}.$$

Elle est inversible et **égale à son propre inverse**.

Q6. Calculons les deux produits coefficient par coefficient. Multiplier à gauche par D multiplie la ligne i par $(-1)^i$; multiplier à droite multiplie la colonne j par $(-1)^j$:

$$(DU)_{i,j} = (-1)^i \cdot C(j,i) \text{ et}$$

$$(U^{-1}D)_{i,j} = (-1)^{j-i} C(j,i) \cdot (-1)^j = (-1)^{2j-i} C(j,i).$$

Or $(-1)^{2j-i} = (-1)^{-i} = (-1)^i$: les deux matrices coïncident, donc $DU = U^{-1}D$.

En multipliant à gauche par D et en utilisant $D^2 = I$:

$$U = D U^{-1} D = D^{-1} U^{-1} D,$$

ce qui signifie exactement que U est semblable à U^{-1} , la matrice de passage étant D .

Partie A · III — La matrice symétrique de Pascal (Q8 à Q12)

$$S = LU.$$

- **Q8** — le cas $n = 2$: calcul de S , diagonalisabilité, spectre $\{1, \alpha, 1/\alpha\}$.

Q8. Avec $L = U^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, le produit donne

$$S = LU = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

S est **symétrique réelle**, donc diagonalisable dans une base orthonormée (théorème spectral).

Son polynôme caractéristique s'obtient par les invariants : $\text{Tr}(S) = 9$, la somme des mineurs principaux d'ordre 2 vaut $1 + 5 + 3 = 9$, et $\det(S) = \det(L)\det(U) = 1$. D'où

$$\chi_S = X^3 - 9X^2 + 9X - 1.$$

$X = 1$ est racine évidente, et la factorisation donne $\chi_S = (X - 1)(X^2 - 8X + 1)$, dont les racines sont $4 \pm \sqrt{15}$.

Comme $(4 + \sqrt{15})(4 - \sqrt{15}) = 1$, le spectre est bien $\{1, \alpha, 1/\alpha\}$ avec

$$\alpha = 4 + \sqrt{15} \approx 7,87 > 1.$$

- **Q9** — le cas général : S est diagonalisable, inversible, semblable à son inverse.
- **Q10, Q11** — le spectre de S est formé de réels strictement positifs, stable par $x \mapsto 1/x$.

Q9. Dans le cas général, $S^T = (LU)^T = U^T L^T = LU = S$: S est symétrique réelle, donc **diagonalisable**. Et $\det(S) = \det(L) \cdot \det(U) = 1 \neq 0$: elle est **inversible**.

Pour la similitude, partons de $S = U^T U$ et de $U^{-1} = D U D$ (Q6) :

$$S^{-1} = U^{-1} (U^T)^{-1} = (D U D) (D U^T D) = D \cdot U \cdot U^T \cdot D,$$

en utilisant $D^2 = I$. Or

$$(D U) S (D U)^{-1} = D U \cdot (U^T U) \cdot U^{-1} D^{-1} = D \cdot U \cdot U^T \cdot D.$$

Les deux expressions coïncident : $S^{-1} = (D U) S (D U)^{-1}$, donc S est semblable à son inverse.

- **Q12** — la réciproque est-elle vraie ?

Q12. Non, la réciproque est fautive. La matrice $A = \text{Diag}(2, 2, 1/2)$ a pour spectre $\{2, 1/2\}$, stable par passage à l'inverse.

Pourtant A n'est pas semblable à $A^{-1} = \text{Diag}(1/2, 1/2, 2)$: leurs traces diffèrent,

$$\text{Tr}(A) = 4,5 \text{ et } \text{Tr}(A^{-1}) = 3,$$

alors que deux matrices semblables ont même trace. La raison profonde : la stabilité du spectre comme **ensemble** ne dit rien des **multiplicités**, et ici 2 est double d'un côté, simple de l'autre.

Q10. Calculons $X^T S X$ de deux façons. D'une part, $SX = \lambda X$ donne

$$X^T S X = \lambda \cdot X^T X = \lambda \|X\|_2^2.$$

D'autre part, $S = U^T U$ donne $X^T S X = (UX)^T (UX) = \|UX\|_2^2$.

Comme U est inversible et $X \neq 0$, on a $UX \neq 0$, donc

$$\lambda = \|UX\|_2^2 / \|X\|_2^2 > 0.$$

Q11. S est semblable à S^{-1} (Q9), donc elles ont **le même spectre**.

Or le spectre de S^{-1} est formé des inverses des valeurs propres de S — qui sont non nulles d'après Q10. Donc

$\text{Sp}(S) = \{1/\lambda ; \lambda \in \text{Sp}(S)\}$: le spectre est **stable par $x \mapsto 1/x$** .

Partie A · IV — Les coefficients de S par dénombrement (Q13 à Q15)

$\Omega_{\{i,j\}}$ désigne l'ensemble des chemins de la source s vers le sommet (i, j) dans le graphe orienté G_n .

- **Q13** — le cardinal de $\Omega_{\{2,2\}}$, puis de $\Omega_{\{i,j\}}$ en général.

Q13. Après l'arc obligatoire $s \rightarrow (0,0)$, un chemin vers (i, j) est une suite d'arcs qui augmentent d'une unité soit la première coordonnée, soit la seconde.

Pour atteindre $(2, 2)$, il faut donc 2 pas de chaque type, en tout 4 pas, et un chemin est déterminé par le choix des rangs des pas du premier type :

$$|\Omega_{\{2,2\}}| = C(4, 2) = 6.$$

En général, il faut i pas d'un type et j de l'autre parmi $i + j$:

$$|\Omega_{\{i,j\}}| = C(i + j, i).$$

- **Q14** — un système complet d'événements donnant la formule de Vandermonde.

Q14. Un chemin de s vers (i, j) passe par exactement un sommet dont la somme des coordonnées vaut i : les sommets $(k, i-k)$ pour $0 \leq k \leq i$. Les événements A_k forment donc bien un **système complet**.

Un chemin de A_k se décompose de manière unique en un chemin de s vers $(k, i-k)$, puis un chemin de $(k, i-k)$ vers (i, j) . Le premier morceau compte $C(i, k)$ possibilités d'après **Q13** ; le second demande $i - k$ pas d'un type et $j - (i-k)$ de l'autre, soit $C(j, i-k)$ possibilités. Donc

$$|A_k| = C(i, k) \cdot C(j, i-k).$$

En sommant sur k et en identifiant avec $|\Omega_{\{i,j\}}| = C(i+j, i)$:

$$C(i+j, i) = \sum_{k=0}^i C(i, k) \cdot C(j, i-k).$$

C'est la formule de Vandermonde, obtenue ici en comptant des chemins plutôt que des parties.

- **Q15** — le coefficient d'indice (i, j) de S .

Q15. Par définition de $S = LU$, et puisque $L_{\{i,k\}} = U_{\{k,i\}}$:

$$S_{\{i,j\}} = \sum_k L_{\{i,k\}} U_{\{k,j\}} = \sum_k C(i, k) \cdot C(j, k).$$

La symétrie $C(i, k) = C(i, i-k)$ transforme cette somme en

$$\sum_k C(i, i-k) C(j, k) = \sum_{k'} C(i, k') C(j, i-k') = C(i+j, i)$$

d'après **Q14**. Donc $S_{\{i,j\}} = C(i+j, i)$ — on retrouve bien la matrice calculée en **Q8**, dont les coefficients sont les nombres du triangle de Pascal lus en diagonale.

Partie B · I — La suite des dérangements (Q16 à Q22)

$a_0 = 1$, $a_1 = 0$, et $a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1})$.

- **Q16, Q17** — les premières valeurs, et une fonction Python.
- **Q18, Q19** — a_n est un entier naturel, majoré par $n!$.
- **Q20 à Q22** — l'encadrement par les sommes partielles de $\sum (-1)^k/k!$, l'identité $a_n = n!S_n$, et l'équivalent.

Q16. $a_2 = 1 \cdot (a_1 + a_0) = 0 + 1 = 1$ et $a_3 = 2 \cdot (a_2 + a_1) = 2 \cdot (1 + 0) = 2$.

Q17.

```
def liste_an(n):  
    a = [1, 0] # a_0 et a_1  
    if n == 0:  
        return [1]  
    for k in range(1, n):  
        a.append(k * (a[k] + a[k - 1]))  
    return a[:n + 1]
```

La liste est construite **par ordre croissant d'indice**, de sorte que les deux termes nécessaires au calcul de a_{k+1} sont déjà présents. Le découpage final traite le cas $n = 1$, où la liste initiale est déjà trop longue.

Q18. Récurrence double. $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ sont des entiers naturels ; et si a_{n-1} et a_n le sont, alors $a_{n+1} = n(a_n + a_{n-1})$ est un produit et une somme d'entiers naturels.

Q19. Même schéma. L'initialisation est claire : $a_0 = 1 = 0!$ et $a_1 = 0 \leq 1!$.

Si $a_n \leq n!$ et $a_{n-1} \leq (n-1)!$, alors

$$a_{n+1} \leq n(n! + (n-1)!) = n \cdot (n-1)! \cdot (n+1) = (n+1)!,$$

en factorisant $(n-1)!$ dans la parenthèse.

Q20. La série $\sum (-1)^k/k!$ est le développement de l'exponentielle en -1 : elle converge, de somme $1/e$.

C'est de plus une **série alternée** dont la valeur absolue du terme général, $1/k!$, décroît vers 0 : le critère spécial s'applique, et la somme est **encadrée par deux sommes partielles consécutives**, la parité de n décidant de l'ordre :

$$S_n \leq 1/e \leq S_{n+1} \text{ ou } S_{n+1} \leq 1/e \leq S_n.$$

Q21. Posons $b_n = n!S_n$ et vérifions que (b_n) satisfait la même récurrence que (a_n) avec les mêmes valeurs initiales — ce qui les identifiera.

$$b_0 = 1 \text{ et } b_1 = 1 \cdot (1 - 1) = 0 \quad \checkmark$$

Pour l'hérédité, $S_{n+1} = S_n + (-1)^{n+1}/(n+1)!$ donne

$$b_{n+1} = (n+1)!S_n + (-1)^{n+1},$$

tandis que $n(b_n + b_{n-1}) = n \cdot n!S_n + n!S_{n-1}$. En remplaçant

$$S_{n-1} = S_n - (-1)^n/n! :$$

$$n(b_n + b_{n-1}) = (n+1) \cdot n! \cdot S_n - (-1)^n = (n+1)!S_n + (-1)^{n+1}.$$

Les deux expressions coïncident : $a_n = n!S_n$.

L'écart à $n!/e$ se majore alors par le reste d'une série alternée, lequel est majoré par le premier terme négligé :

$$|n!/e - a_n| = n! \cdot |1/e - S_n| \leq n!/(n+1)! = 1/(n+1) < 1/2 \text{ pour } n \geq 1.$$

Un entier situé à moins de $1/2$ d'un réel en est **le plus proche**, et il est unique.

Q22. De $|a_n - n!/e| \leq 1/(n+1)$ on tire

$$|a_n/(n!/e) - 1| \leq e/((n+1) \cdot n!) \rightarrow 0,$$

donc $a_n \sim n!/e$.

La suite (a_n) compte les permutations sans point fixe : environ une permutation sur e n'en a aucun, et ce rapport ne dépend pratiquement pas de n . C'est ce que la partie D établira.

Partie B · II — La série entière associée (Q23 à Q25)

$$s(x) = \sum (a_n/n!)x^n.$$

- **Q23** — le rayon de convergence vaut 1, et s est solution d'un système différentiel.

Q23. D'après **Q21**, $a_n/n! = S_n$, qui tend vers $1/e \neq 0$. Le terme général est donc équivalent à x^n/e : la série converge si $|x| < 1$ et diverge grossièrement si $|x| > 1$. Le rayon vaut $R = 1$.

Sur $] -1, 1[$, la dérivation terme à terme donne $s'(x) = \sum_{n \geq 0} (a_{n+1}/n!) \cdot x^n$.

Le coefficient de x^n dans $(1-x)s'(x) - x \cdot s(x)$ vaut alors, pour $n \geq 1$:

$$a_{n+1}/n! - a_n/(n-1)! - a_{n-1}/(n-1)! = [a_{n+1} - n(a_n + a_{n-1})]/n! = 0$$

par la relation de récurrence. Pour $n = 0$, il vaut $a_1 = 0$. Tous les coefficients étant nuls, $(1-x)s' - xs = 0$, et $s(0) = a_0 = 1$.

- **Q24** — la résolution, et l'expression close de s .

Q24. Sur $] -1, 1[$, l'équation se sépare :

$$y'/y = x/(1-x) = -1 + 1/(1-x).$$

En intégrant : $\ln|y| = -x - \ln(1-x) + C$, soit $y(x) = K \cdot e^{-x}/(1-x)$.

La condition $y(0) = 1$ donne $K = 1$:

$$s(x) = e^{-x}/(1-x).$$

- **Q25** — la formule de Leibniz appliquée à $x \mapsto e^x s(x)$.

Q25. L'expression précédente se lit $e^x \cdot s(x) = 1/(1-x)$, dont le développement en série entière est $\sum x^p$: sa dérivée p -ième en 0 vaut $p!$.

Calculons-la autrement, par Leibniz — toutes les dérivées de l'exponentielle valent 1 en 0 :

$$(e^x s)^{(p)}(0) = \sum_{k=0}^p C(p, k) \cdot s^{(k)}(0).$$

Or s est somme d'une série entière de coefficients $a_k/k!$, donc

$$s^{(k)}(0) = k! \cdot (a_k/k!) = a_k. \text{ En identifiant les deux calculs :}$$

$$p! = \sum_{k=0}^p C(p, k) \cdot a_k.$$

Partie C · I et II — Représenter une permutation (Q26 à Q30)

Une permutation se représente par un graphe orienté $G(\sigma)$ ou par une matrice $M(\sigma)$ dont le coefficient (i, j) vaut 1 si et seulement si $\sigma(i) = j$.

- Q26, Q27 — passer d'une représentation à l'autre sur deux exemples.
- Q28 à Q30 — l'inverse et le carré d'une matrice de permutation.

Q26. La matrice se lit ligne par ligne : la ligne i porte un 1 en colonne $\sigma(i)$. Ici

$$\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 3, \sigma(4) = 2.$$

Le graphe comporte donc deux boucles, en 1 et en 3, et une bi-boucle entre 2 et 4.

Q27. Le graphe montre un cycle sur $\{1, 2, 3, 4\}$ et une boucle en 5. En lisant le sens des flèches, σ est le cycle $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ avec $\sigma(5) = 5$, d'où la matrice

$$M(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si le sens de parcours lu sur la figure est l'autre, la matrice obtenue est la **transposée** de celle-ci — c'est exactement ce que dit Q29.

Q28. Calculons le produit. Le coefficient (i, j) de $M(\sigma)M(\tau)$ vaut

$$\sum_k M(\sigma)_{i,k} M(\tau)_{k,j},$$

somme qui vaut 1 s'il existe k avec $\sigma(i) = k$ et $\tau(k) = j$, c'est-à-dire si $\tau(\sigma(i)) = j$, et 0 sinon. Donc

$$M(\sigma)M(\tau) = M(\tau \circ \sigma).$$

En particulier $M(\sigma)M(\sigma^{-1}) = M(\sigma^{-1} \circ \sigma) = M(\text{id}) = I_n$, ce qui prouve que $M(\sigma)$ est inversible d'inverse $M(\sigma^{-1})$.

Q29. Pour le graphe, $\sigma^{-1}(j) = i$ équivaut à $\sigma(i) = j$: on obtient $G(\sigma^{-1})$ en **renversant toutes les flèches** de $G(\sigma)$.

Pour la matrice, la même équivalence signifie que le 1 en position (i, j) devient un 1 en position (j, i) : $M(\sigma^{-1}) = M(\sigma)^T$. Avec Q28 :

$$M(\sigma)^{-1} = M(\sigma^{-1}) = M(\sigma)^T.$$

Autrement dit, **les matrices de permutation sont orthogonales**.

Q30. C'est Q28 appliquée à $\tau = \sigma$:

$$M(\sigma)^2 = M(\sigma \circ \sigma) = M(\sigma^2).$$

Partie C · III — Matrices de permutation diagonalisables (Q31 à Q35)

Le théorème à établir : $M(\sigma)$ est diagonalisable si et seulement si $G(\sigma)$ ne contient que des boucles ou des bi-boucles.

- Q31 — l'exemple : polynôme caractéristique et diagonalisabilité.
- Q32 à Q34 — le sens direct.

Q31. L'énoncé renvoie à « la matrice introduite en Q25 » ; il s'agit de celle de Q26, la seule matrice de permutation introduite jusque-là — le polynôme annoncé le confirme.

Cette matrice est diagonale par blocs : deux blocs 1×1 égaux à 1 pour les points fixes 1 et 3, et le bloc $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ pour la bi-boucle $2 \leftrightarrow 4$. Son polynôme caractéristique est donc

$$\chi = (X - 1)^2 \cdot (X^2 - 1) = (X - 1)^3 (X + 1).$$

Elle est **diagonalisable** : la permutation vérifie $\sigma^2 = \text{id}$, donc $M(\sigma)^2 = I_4$ (Q30), et $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur **scindé à racines simples**.

C'est cohérent avec le théorème : le graphe ne contient que deux boucles et une bi-boucle.

- Q35 — la réciproque.

Q35. Réciproquement, si $G(\sigma)$ ne contient que des boucles et des bi-boucles, alors σ est produit de points fixes et de transpositions à supports disjoints, donc $\sigma^2 = \text{id}$.

Par Q30, $M(\sigma)^2 = M(\text{id}) = I_n$, donc $X^2 - 1$ annule $M(\sigma)$. Ce polynôme est **scindé à racines simples** sur $\mathbb{R}$: $M(\sigma)$ est **diagonalisable**.

Le théorème est ainsi démontré dans les deux sens.

Q32. $M(\sigma)$ est orthogonale (Q29), donc conserve la norme : pour un vecteur propre X associé à λ , $\|X\|_2 = \|M(\sigma)X\|_2 = |\lambda| \cdot \|X\|_2$, donc $|\lambda| = 1$.

$M(\sigma)$ étant supposée diagonalisable sur $\mathbb{R}$, ses valeurs propres sont réelles : $\lambda = \pm 1$, donc $\lambda^2 = 1$.

Q33. $M(\sigma)$ est diagonalisable et ses valeurs propres valent 1 ou -1 : elle est donc semblable à la matrice diagonale formée de q coefficients 1 et de $n - q$ coefficients -1, où q est la multiplicité de la valeur propre 1.

Q34. En élevant au carré cette matrice diagonale, on obtient I_n . Donc

$$M(\sigma^2) = M(\sigma)^2 = P \cdot I_n \cdot P^{-1} = I_n = M(\text{id}).$$

L'application M étant **injective**, $\sigma^2 = \text{id}$.

Une permutation involutive n'a que des cycles de longueur 1 ou 2 : dans le graphe, cela donne exactement des **boucles** (points fixes) et des **bi-boucles** (transpositions).

Partie D — Graphes de permutations sans boucle (Q36 à Q41)

B_n est l'événement « le graphe choisi est sans boucle », b_n son cardinal, et X_n le nombre de boucles.

- Q36, Q37 — le cardinal de $G(S_n)$, les valeurs de X_n , et sa loi.
- Q38, Q39 — la relation entre $p!$ et les b_k , puis les premières valeurs.
- Q40, Q41 — la probabilité cherchée, obtenue de deux façons.

Q36. L'application G est une bijection de S_n sur $G(S_n)$, donc

$$|G(S_n)| = |S_n| = n!.$$

X_n compte les points fixes de σ : ses valeurs possibles sont les entiers de 0 à n , à l'exception de $n-1$ — une permutation qui fixe $n-1$ éléments fixe nécessairement le dernier.

Q37. Un graphe ayant exactement j boucles correspond à une permutation ayant j points fixes. On choisit ces points fixes — $C(n, j)$ façons — puis on prend une permutation **sans point fixe** des $n-j$ éléments restants, soit b_{n-j} possibilités. Comme les $n!$ graphes sont équiprobables :

$$P(X_n = j) = C(n, j) \cdot b_{n-j} / n!.$$

*Une remarque sur la convention : l'énoncé pose $b_0 = 0$, mais la formule ci-dessus appliquée à $j = n$ donne $P(X_n = n) = b_0 / n!$, alors que cette probabilité vaut $1/n!$ — seule l'identité fixe tous les points. La convention cohérente est $b_0 = 1$: la permutation de l'ensemble vide n'a aucun point fixe, c'est un dérangement. C'est celle que la suite adopte, faute de quoi **Q38** échouerait dès $p = 0$.*

Q38. Les événements $(X_n = j)$ pour j variant forment un système complet, donc la somme de leurs probabilités vaut 1 :

$$\sum_{j=0}^n C(n, j) \cdot b_{n-j} = n!.$$

Le changement d'indice $k = n - j$, joint à $C(n, n-k) = C(n, k)$, donne le cas $p = n$. Le raisonnement étant valable pour tout entier, il vaut pour tout $p \leq n$:

$$p! = \sum_{k=0}^p C(p, k) \cdot b_k.$$

Q39. Cette relation détermine les b_k **de proche en proche** : à l'ordre p , le seul terme inconnu est b_p , tous les précédents ayant déjà été calculés.

$$\begin{aligned} p = 0 : 1 &= b_0, \text{ donc } b_0 = 1. & p = 1 : 1 &= b_0 + b_1, \text{ donc } b_1 = 0. & p = 2 : \\ 2 &= b_0 + 2b_1 + b_2, \text{ donc } b_2 = 1. & p = 3 : 6 &= b_0 + 3b_1 + 3b_2 + b_3, \text{ donc } b_3 = 2. \end{aligned}$$

On reconnaît les premières valeurs de la suite (a_n) de la partie B.

Q40. Les suites (a_k) et (b_k) vérifient exactement la même relation — comparer **Q25** et **Q38** — et cette relation les détermine entièrement par récurrence forte. Donc $b_k = a_k$ pour tout k .

D'après **Q21**, $a_n = n! \cdot S_n$, d'où

$$P(B_n) = b_n / n! = S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k / k!.$$

Q41. La matrice L a pour coefficients $L_{i,j} = C(i, j)$ (**Q3** et **Q7**). Le produit $L \cdot (b_0, \dots, b_n)^T$ a donc pour i -ième composante

$$\sum_j C(i, j) b_j = i!$$

d'après **Q38** : c'est exactement le vecteur F . Autrement dit

$$L^{-1} F = (b_0, b_1, \dots, b_n)^T.$$

Or $L^{-1} = (U^{-1})^T$ a pour coefficients $(-1)^{i-j} C(i, j)$ (**Q4**). La dernière composante donne

$$b_n = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} C(n, j) \cdot j! = n! \cdot \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} / (n-j)!,$$

les factorielles se simplifiant dans $C(n, j) \cdot j! = n! / (n-j)!$. Le changement d'indice $k = n - j$ donne

$$P(B_n) = b_n / n! = \sum_{k=0}^n (-1)^k / k!,$$

retrouvant **Q40** par un chemin entièrement différent.

Cette probabilité tend vers $1/e \approx 0,368$: environ **37 %** des permutations n'ont aucun point fixe, et ce nombre ne dépend presque pas de n . C'est le paradoxe des chapeaux — si n personnes reprennent un chapeau au hasard, la probabilité que personne ne retrouve le sien est pratiquement indépendante du nombre de personnes.