



P U L S A R S

CORRECTION INDÉPENDANTE

Centrale-Supélec 2026 — Mathématiques 2 (PSI)

SESSION 2026	NIVEAU CPGE	DURÉE —	FILIÈRES PSI
------------------------	-----------------------	-------------------	------------------------

Correction indépendante rédigée par Pulsars. Elle n'est ni officielle ni affiliée à l'organisateur du concours. Les énoncés ne sont pas reproduits : le sujet officiel reste consultable sur le site du concours.

Partie A — Un produit scalaire à poids (Q1 à Q8)

α et β sont deux réels strictement supérieurs à -1 .

- **Q1, Q2** — convergence des intégrales de Riemann en une borne.
- **Q3** — convergence de $\int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta f(t) dt$ pour f continue.

Q3. La fonction est continue sur $] -1, 1[$; il n'y a de problème qu'aux deux bornes.

Au voisinage de 1 : f est bornée par $M = \|f\|_\infty$ et $(1+t)^\beta$ tend vers 2^β , donc l'intégrande est dominé par une constante fois $(1-t)^\alpha$. Or $\int_0^1 (1-t)^\alpha dt$ converge si et seulement si $-\alpha < 1$, c'est-à-dire $\alpha > -1$: c'est l'hypothèse.

Au voisinage de -1 , le même argument avec $\beta > -1$ conclut. L'intégrale **converge**.

- **Q4** — cette intégrale définit un produit scalaire sur $R[X]$.
- **Q5, Q6** — le cas $\alpha = \beta = -1/2$.
- **Q7, Q8** — le cas $\alpha = \beta = 0$.

Q4. Elle est bien définie d'après **Q3**, PQ étant continue sur $[-1, 1]$. La bilinéarité et la symétrie découlent de celles du produit et de la linéarité de l'intégrale.

Positivité. Le poids $\omega(t) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$ est strictement positif sur $] -1, 1[$, donc $\langle P, P \rangle = \int \omega P^2 \geq 0$.

Caractère défini. Si $\langle P, P \rangle = 0$, la fonction continue et positive ωP^2 est d'intégrale nulle sur $] -1, 1[$: elle y est identiquement nulle. Comme $\omega > 0$, P s'annule sur tout $] -1, 1[$, donc admet une infinité de racines : $P = 0$.

C'est donc un **produit scalaire** sur $R[X]$.

Q1. L'intégrale $\int_0^1 dt/t^\delta$ converge si et seulement si $\delta < 1$, et vaut alors

$$\int_0^1 t^{-\delta} dt = [t^{1-\delta}/(1-\delta)]_0^1 = 1/(1-\delta).$$

Q2. Le changement de variable affine $u = a - t$ transforme $\int_0^a dt/(a-t)^\delta$ en $\int_0^a du/u^\delta$, qui est de même nature que l'intégrale précédente : elle converge **si et seulement si** $\delta < 1$.

Q5. Avec $\alpha = \beta = -1/2$, le poids vaut $1/\sqrt{1-t^2}$, qui est **pair**, tandis que $t \mapsto t$ est impaire :

$$\langle 1, X \rangle = \int_{-1}^1 t/\sqrt{1-t^2} dt = 0,$$

intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique.

Q6. $\|1\|^2 = \int_{-1}^1 dt/\sqrt{1-t^2} = [\arcsin t]_{-1}^1 = \pi$, donc $\|1\| = \sqrt{\pi}$.

Pour $\|X\|^2$, le changement de variable $t = \sin \theta$ donne $dt = \cos \theta d\theta$ et $\sqrt{1-t^2} = \cos \theta$:

$$\|X\|^2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \pi/2, \text{ donc } \|X\| = \sqrt{(\pi/2)}.$$

Q7. Avec $\alpha = \beta = 0$, le produit scalaire est l'intégrale usuelle :

$$\langle X^i, X^j \rangle = \int_{-1}^1 t^{i+j} dt.$$

Si $i + j$ est **impair**, l'intégrande est impaire et l'intégrale est **nulle**. Sinon, elle vaut $2/(i + j + 1)$.

Les monômes ne forment donc pas une famille orthogonale : c'est bien pour cela que la partie C construit une base adaptée.

Q8. $\|X^i\|^2 = \int_{-1}^1 t^{2i} dt = 2/(2i+1)$, donc $\|X^i\| = \sqrt{2/(2i+1)}$.

Partie B — Autour des coefficients binomiaux (Q9, Q10)

- **Q9** — la formule de Vandermonde, par un argument de dénombrement.

Q9. Comptons de deux façons les parties à k éléments d'un ensemble F de cardinal $m + p$.

D'un côté, ce nombre vaut par définition $C(m+p, k)$.

De l'autre, partitionnons $F = A \sqcup B$ avec $|A| = m$ et $|B| = p$. Toute partie à k éléments se décompose de manière unique selon le nombre j d'éléments qu'elle prend dans B : il y a $C(p, j)$ choix dans B , et $C(m, k-j)$ choix dans A , les deux étant indépendants.

En sommant sur les valeurs possibles de j :

$$C(m+p, k) = \sum_{j=0}^k C(m, k-j) \cdot C(p, j).$$

Le raisonnement est purement combinatoire : c'est ce qui permet ensuite de généraliser la formule à des « coefficients binomiaux » d'argument réel, où le dénombrement n'a plus de sens mais où l'identité polynomiale subsiste.

- **Q10** — comparaison du coefficient binomial $C(n, k)$ et du coefficient généralisé B_k^n .

Q10. Pour $0 < k \leq n$ entiers,

$$B_k^n = n(n-1)\cdots(n-k+1)/k!,$$

et le numérateur est exactement $n!/(n-k)!$. Donc

$$B_k^n = n!/(k!(n-k)!) = C(n, k),$$

égalité qui vaut aussi pour $k = 0$, les deux membres valant 1.

B_k^λ prolonge donc le coefficient binomial à un « haut » réel quelconque — c'est ce prolongement qui interviendra dans la dérivation de $(1-x)^j$ pour j non entier.

Partie C · I — Premières propriétés des polynômes P_k (Q11 à Q13)

$(P_0, \dots, P_n)$ est la base orthonormale obtenue par Gram-Schmidt à partir de $(1, X, \dots, X^n)$.

- **Q11** — P_k est de degré k .

Q11. La condition (i) donne $\text{Vect}(P_0, \dots, P_k) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^k)$, de dimension $k + 1$, et de même au rang $k - 1$ avec la dimension k .

Donc P_k appartient à $\text{Vect}(1, \dots, X^k)$ — son degré est $\leq k$ — mais pas à $\text{Vect}(1, \dots, X^{k-1})$, sans quoi les deux sous-espaces coïncideraient. Son degré est donc **exactement** k .

- **Q12** — P_k est orthogonal à tous les polynômes de degré $< k$.

Q12. D'après **Q11** et la condition (i),

$$\text{Vect}(1, X, \dots, X^{k-1}) = \text{Vect}(P_0, \dots, P_{k-1}).$$

Or la famille (P_i) est orthonormale, donc $\langle P_k, P_i \rangle = 0$ pour $i < k$. Par bilinéarité, P_k est orthogonal à toute combinaison linéaire des P_i , $i \leq k-1$:

$$P_k \in \text{Vect}(1, X, \dots, X^{k-1})^\perp.$$

- **Q13** — tout polynôme de degré k orthogonal à $\text{Vect}(1, \dots, X^{k-1})$ est proportionnel à P_k .

Q13. Q est de degré k , donc $Q \in \text{Vect}(1, \dots, X^k) = \text{Vect}(P_0, \dots, P_k)$:

$$Q = \sum_{i=0}^k c_i P_i, \text{ avec } c_i = \langle Q, P_i \rangle \text{ puisque la base est orthonormale.}$$

Pour $i \leq k - 1$, le polynôme P_i est de degré $i \leq k-1$, donc appartient à $\text{Vect}(1, \dots, X^{k-1})$, auquel Q est orthogonal par hypothèse : $c_i = 0$.

Il reste $Q = c_k P_k$, c'est-à-dire $Q = \alpha_k P_k$ avec $\alpha_k = \langle Q, P_k \rangle$.

Autrement dit, la condition « être de degré k et orthogonal à tout ce qui est de degré inférieur » caractérise P_k à une constante près. C'est ce qui permettra, en partie D, de reconnaître les polynômes de Jacobi sans refaire Gram-Schmidt.

Partie C · II et III — Relation à trois termes et racines (Q14 à Q19)

- **Q14, Q15** — l'existence d'une relation de récurrence liant P_{k+1} , P_k et P_{k-1} .
- **Q16 à Q19** — les racines de P_k dans $] -1, 1[$: leur nombre m , le polynôme S construit sur elles, et la conclusion.

Q14. P_{k+1} est de degré $k+1$ (Q11), et XP_k aussi.

Notons λ et μ leurs coefficients dominants respectifs, $\mu \neq 0$. En posant

$$a_k = \lambda/\mu,$$

le polynôme $P_{k+1} - a_k XP_k$ a un coefficient de degré $k+1$ nul : il est de **degré $\leq k$** .

Q15. Posons $R = P_{k+1} - a_k XP_k$, de degré $\leq k$. Il se décompose dans la base orthonormale :

$$R = \sum_{i=0}^k d_i P_i, \text{ avec } d_i = \langle R, P_i \rangle.$$

Calculons d_i pour $i \leq k-2$. D'une part $\langle P_{k+1}, P_i \rangle = 0$. D'autre part, le produit scalaire vérifie $\langle XP, Q \rangle = \langle P, XQ \rangle$ — le facteur t se déplace librement dans l'intégrale —, donc

$$\langle XP_k, P_i \rangle = \langle P_k, XP_i \rangle = 0,$$

puisque XP_i est de degré $i+1 \leq k-1$ et que P_k est orthogonal à tout polynôme de degré $< k$ (Q12).

Il ne reste donc que deux termes :

$$P_{k+1} = a_k XP_k + d_k P_k + d_{k-1} P_{k-1} = (a_k X + b_k) P_k + c_k P_{k-1},$$

avec $b_k = d_k$ et $c_k = d_{k-1}$.

C'est la relation à trois termes, commune à toutes les familles de polynômes orthogonaux : elle tient uniquement à la propriété $\langle XP, Q \rangle = \langle P, XQ \rangle$.

Q16. Les x_i sont des racines de P_k , comptées avec multiplicité, et P_k est de degré k : un polynôme non nul a au plus autant de racines que son degré, donc

$$m \leq k.$$

Q17. Chaque x_i figure dans S avec sa multiplicité dans P_k . On peut donc écrire $P_k = S \cdot T$ où T est un polynôme **sans racine dans $] -1, 1[$** .

Alors $P_k \cdot S = S^2 \cdot T$. Le facteur S^2 est positif, et T , fonction polynomiale continue ne s'annulant pas sur l'intervalle, y garde un **signe constant** (théorème des valeurs intermédiaires).

Donc $x \mapsto P_k(x)S(x)$ est de **signe constant sur $] -1, 1[$** , et ne s'annule qu'aux points x_i , en nombre fini.

Q18. $\langle P_k, S \rangle = \int_{-1}^1 \omega(x) P_k(x) S(x) dx$ où $\omega > 0$.

L'intégrande est de signe constant, continu, et non identiquement nul — il ne s'annule qu'en un nombre fini de points. Une telle intégrale est **non nulle** :

$$\langle P_k, S \rangle \neq 0.$$

Q19. Supposons $m < k$. Alors $\deg S = m \leq k-1$, donc $S \in \text{Vect}(1, \dots, X^{k-1})$, et Q12 donnerait $\langle P_k, S \rangle = 0$ — ce que Q18 interdit.

Donc $m = k$: **P_k admet k racines réelles dans $] -1, 1[$** , comptées avec multiplicité. Comme son degré est k , il n'en a pas d'autres, et elles sont toutes **simples**.

Ce résultat est général pour les familles orthogonales, et c'est lui qui fonde les méthodes de quadrature de Gauss : les nœuds sont les racines, et elles sont toutes dans l'intervalle d'intégration.

Partie D · I — Les polynômes de Jacobi (Q20 à Q24)

$g_k(x) = (1-x)^{\alpha+k}(1+x)^{\beta+k}$ et J_k est défini à partir de $g_k^{(k)}$.

- Q20 — les expressions de g_0 , g_1 , puis de J_0 et J_1 .

Q20. $g_0(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, donc

$$J_0(x) = (1/(1-x)^\alpha(1+x)^\beta) \cdot g_0(x) = 1.$$

Pour $g_1(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}$, la dérivée d'un produit donne

$$g_1'(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta \cdot [-(\alpha+1)(1+x) + (\beta+1)(1-x)],$$

après mise en facteur. Donc

$$J_1(x) = (-1/2) \cdot [-(\alpha+1)(1+x) + (\beta+1)(1-x)] = (\alpha-\beta)/2 + ((\alpha+\beta+2)/2) \cdot x.$$

C'est un polynôme de degré 1, de coefficient dominant $(\alpha+\beta+2)/2 > 0$.

- Q21 — la dérivée p -ième de $x \mapsto (1-x)^j$ pour j réel.
- Q22, Q23 — l'expression de $g_k^{(k)}$ par la formule de Leibniz, puis celle de J_k .

Q21. Une récurrence immédiate : chaque dérivation fait descendre l'exposant d'une unité et sort un facteur $-j$, puis $-(j-1)$, etc. Au rang p :

$$d^p/dx^p (1-x)^j = (-1)^p \cdot j(j-1)\cdots(j-p+1) \cdot (1-x)^{j-p} = (-1)^p \cdot p! \cdot B_p^j \cdot (1-x)^{j-p},$$

par définition de B_p^j . Le calcul est licite sur $] -1, 1[$ où $1-x > 0$.

De même, sans le signe alterné : $d^p/dx^p (1+x)^j = p! \cdot B_p^j \cdot (1+x)^{j-p}$.

- Q24 — J_k est polynomiale de degré k , et son coefficient dominant.

Q24. Chaque terme $(x-1)^i(x+1)^{k-i}$ est un polynôme de degré k , de coefficient dominant 1. Donc J_k est **polynomiale de degré au plus k** , de coefficient dominant

$$(1/2^k) \cdot \sum_{i=0}^k B_{k-i}^{\alpha} B_i^{\beta}.$$

La formule de Vandermonde généralisée, avec $s = k+\alpha$ et $t = k+\beta$, identifie cette somme :

$$\text{coefficient dominant} = B_k^{\alpha+\beta+2} / 2^k.$$

Il est **non nul** : c'est le produit des facteurs $2k+\alpha+\beta-j$ pour $0 \leq j \leq k-1$, tous strictement positifs puisque le plus petit vaut $k+\alpha+\beta+1 > k-1 \geq 0$ — on utilise $\alpha, \beta > -1$. Donc $\deg J_k = k$ exactement.

Q22. Appliquons la formule de Leibniz à $g_k = u \cdot v$ avec $u = (1-x)^{\alpha+k}$ et $v = (1+x)^{\beta+k}$, en utilisant **Q21** pour chaque facteur :

$$u^{(i)} = (-1)^i i! B_i^{\alpha+k} (1-x)^{\alpha+k-i} \text{ et } v^{(k-i)} = (k-i)! B_{k-i}^{\beta+k} (1+x)^{\beta+i}.$$

Les factorielles se simplifient avec le coefficient binomial $C(k, i)$:

$$g_k^{(k)}(x) = k! \cdot \sum_{i=0}^k (-1)^i B_i^{\alpha+k} B_{k-i}^{\beta+k} (1-x)^{\alpha+k-i} (1+x)^{\beta+i}.$$

Q23. En reportant dans la définition de J_k , le facteur $k!$ disparaît et le poids $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ se simplifie :

$$J_k(x) = (1/2^k) \cdot \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} B_i^{\alpha+k} B_{k-i}^{\beta+k} (1-x)^{k-i} (1+x)^i.$$

Or $(-1)^{k+i}$ et $(-1)^{k-i}$ ont même parité, et $(-1)^{k-i} (1-x)^{k-i} = (x-1)^{k-i}$:

$$J_k(x) = (1/2^k) \cdot \sum_{i=0}^k B_i^{\alpha+k} B_{k-i}^{\beta+k} (x-1)^{k-i} (x+1)^i.$$

Le changement d'indice $i \mapsto k - i$ donne la forme annoncée :

$$J_k(x) = (1/2^k) \cdot \sum_{i=0}^k B_{k-i}^{\alpha+k} B_i^{\beta+k} (x-1)^i (x+1)^{k-i}.$$

Partie D · II — Orthogonalité des polynômes de Jacobi (Q25 à Q28)

- **Q25** — convergence de deux intégrales, et une relation entre elles obtenue par intégration par parties.

Q25. D'après **Q22**, $g_k^{(k)}$ est combinaison des $(1-x)^{\alpha+k-i}(1+x)^{\beta+i}$ pour $0 \leq i \leq k$: les exposants valent au moins $\alpha > -1$ et $\beta > -1$, donc chaque terme est intégrable sur $] -1, 1[$ (**Q3**). L'intégrale $\int x^i g_k^{(k)}$ converge.

Pour $g_k^{(k-1)}$, la même formule à l'ordre $k-1$ fait apparaître les exposants $\alpha+k-i$ et $\beta+i+1$ pour $0 \leq i \leq k-1$, tous **strictement positifs** :

$$\alpha + k - i \geq \alpha + 1 > 0 \text{ et } \beta + i + 1 \geq \beta + 1 > 0.$$

La fonction $g_k^{(k-1)}$ est donc non seulement intégrable, mais **s'annule en -1 et en 1** .

L'intégration par parties donne alors

$$\int_{-1}^1 x^i g_k^{(k)} dx = [x^i g_k^{(k-1)}]_{-1}^1 - i \int_{-1}^1 x^{i-1} g_k^{(k-1)} dx,$$

et le crochet est **nul** d'après ce qui précède. D'où l'égalité annoncée.

- **Q26** — $\langle J_k, X^i \rangle = 0$ pour $i \leq k-1$.

Q26. Le poids se simplifie exactement avec celui de la définition de J_k :

$$\langle J_k, X^i \rangle = ((-1)^k / (2^k k!)) \cdot \int_{-1}^1 x^i g_k^{(k)}(x) dx.$$

En itérant **Q25** — chaque application abaisse d'un cran l'exposant de x et l'ordre de dérivation :

$$\int x^i g_k^{(k)} = (-1)^i \cdot i! \cdot \int_{-1}^1 g_k^{(k-i)}(x) dx = (-1)^i \cdot i! \cdot [g_k^{(k-i-1)}]_{-1}^1.$$

Pour $i \leq k-1$, l'ordre $k-i-1$ est ≥ 0 , et le même argument qu'en **Q25** montre que $g_k^{(k-i-1)}$ s'annule aux deux bornes. Le crochet est nul, donc

$$\langle J_k, X^i \rangle = 0 \text{ pour tout } i \leq k-1.$$

- **Q27** — $(J_0, \dots, J_n)$ est une base orthogonale.

Q27. La famille $(J_0, \dots, J_n)$ est **échelonnée en degré (Q24)** : elle est libre, et compte $n+1$ éléments dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, de dimension $n+1$. C'est donc une **base**.

Pour l'orthogonalité, soient $k > l$. Le polynôme J_l est de degré $l \leq k-1$, donc combinaison de $1, X, \dots, X^{k-1}$, et **Q26** donne par bilinéarité

$$\langle J_k, J_l \rangle = 0.$$

- **Q28** — comment en déduire une base orthonormale.

Q28. Chaque J_k est non nul, donc $\|J_k\| > 0$. La famille

$$(J_k / \|J_k\|)_{0 \leq k \leq n}$$

est orthonormale, et engendre le même espace : c'est une **base orthonormale** de E .

Quitte à changer le signe de certains vecteurs, on peut de plus imposer $\langle P_k, X^k \rangle > 0$: on retrouve alors exactement la base de la partie C, ce qui identifie les polynômes de Jacobi normalisés aux P_k de Gram-Schmidt — et leur transfère, sans nouveau calcul, la propriété sur les racines établie en **Q19**.

Partie E · I — Les polynômes de Legendre (Q29 à Q33)

Cas $\alpha = \beta = 0$: $L_k = (1/(2^k k!)) \cdot [(X^2-1)^k]^{(k)}$.

- Q29, Q30 — les quatre premiers polynômes et leurs racines.
- Q31 — degré et coefficient dominant, sans recourir à la partie C.
- Q32, Q33 — parité, puis les valeurs en 1 et -1.

Q31. $(X^2 - 1)^k$ est de degré $2k$ et de coefficient dominant 1. Dériver k fois abaisse le degré de k et multiplie le coefficient dominant par

$$(2k)(2k-1)\cdots(k+1) = (2k)!/k!.$$

Donc $\deg L_k = k$, et son coefficient dominant vaut

$$(2k)!/(2^k \cdot k! \cdot k!) = C(2k, k)/2^k.$$

Q29. $L_0 = 1$ et $L_1 = (1/2) \cdot (X^2-1)' = X$.

$$L_2 = (1/8) \cdot [X^4 - 2X^2 + 1]'' = (1/8)(12X^2 - 4) = (3X^2 - 1)/2.$$

$$L_3 = (1/48) \cdot [X^6 - 3X^4 + 3X^2 - 1]^{(3)} = (1/48)(120X^3 - 72X) = (5X^3 - 3X)/2.$$

Q30. L_1 s'annule en 0.

$$L_2 \text{ s'annule en } \pm 1/\sqrt{3} \approx \pm 0,577.$$

$$L_3 = X(5X^2 - 3)/2 \text{ s'annule en } 0 \text{ et } \pm\sqrt{3/5} \approx \pm 0,775.$$

Dans les trois cas, on obtient k racines réelles, simples, toutes dans $]-1, 1[$: c'est bien la conclusion de Q19.

Q32. La fonction $x \mapsto (x^2 - 1)^k$ est paire. Or dériver échange les parités : la dérivée d'une fonction paire est impaire, et réciproquement.

Après k dérivations, L_k a donc la parité de k :

$$L_k(-X) = (-1)^k \cdot L_k(X).$$

Q33. Écrivons $(X^2-1)^k = (X-1)^k(X+1)^k$ et appliquons Leibniz :

$$[(X-1)^k(X+1)^k]^{(k)} = \sum_{i=0}^k C(k, i) \cdot [(X-1)^k]^{(i)} \cdot [(X+1)^k]^{(k-i)}.$$

En $x = 1$, tous les termes contenant encore un facteur $(X-1)$ s'annulent : seul survit $i = k$, qui donne $k! \cdot (X+1)^k$, soit $k! \cdot 2^k$. Donc

$$L_k(1) = (1/(2^k k!)) \cdot k! \cdot 2^k = 1.$$

Et la parité (Q32) donne $L_k(-1) = (-1)^k$.

Partie E · II et III — Équation différentielle et majoration (Q34 à Q37)

Ici $g_k(x) = (1-x^2)^k$.

- **Q34** — exprimer $(1-x^2)g'_k(x)$ à l'aide de g_k .

Q34. $g'_k(x) = k(1-x^2)^{k-1} \cdot (-2x) = -2kx(1-x^2)^{k-1}$, donc en multipliant par $1-x^2$:

$$(1-x^2)g'_k(x) = -2kx \cdot (1-x^2)^k = -2kx \cdot g_k(x).$$

- **Q35** — en dériver $k+1$ fois par Leibniz : L_k vérifie l'équation de Legendre.
- **Q36, Q37** — la fonction auxiliaire f_k est monotone, d'où $|L_k| \leq 1$.

Q35. Dérivons $k+1$ fois l'identité précédente.

À gauche, Leibniz appliqué au produit $(1-x^2) \cdot g'_k$ — le premier facteur a des dérivées nulles au-delà de l'ordre 2 :

$$(1-x^2)g_k^{(k+2)} - 2(k+1)x \cdot g_k^{(k+1)} - k(k+1) \cdot g_k^{(k)},$$

le coefficient du dernier terme provenant de $C(k+1, 2) \cdot (-2)$.

À droite, Leibniz appliqué à $-2kx \cdot g_k$:

$$-2k \cdot [x \cdot g_k^{(k+1)} + (k+1) \cdot g_k^{(k)}].$$

En égalant et en regroupant, les termes en $x \cdot g^{(k+1)}$ se combinent en $-2x$ et ceux en $g^{(k)}$ en $+k(k+1)$:

$$(1-x^2)g_k^{(k+2)} - 2x \cdot g_k^{(k+1)} + k(k+1) \cdot g_k^{(k)} = 0.$$

Comme L_k est proportionnel à $g_k^{(k)}$, il vérifie

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + k(k+1)y = 0.$$

Q36. Dérivons f_k :

$$f_k' = 2L_k L_k' + [-2x(L_k')^2 + 2(1-x^2)L_k' L_k''] / (k(k+1)).$$

L'équation différentielle donne $(1-x^2)L_k'' = 2xL_k' - k(k+1)L_k$, que l'on substitue dans le crochet :

$$-2x(L_k')^2 + 2L_k'(2xL_k' - k(k+1)L_k) = 2x(L_k')^2 - 2k(k+1)L_k L_k'.$$

En divisant par $k(k+1)$ et en ajoutant $2L_k L_k'$, les termes croisés **s'annulent** et il reste

$$f_k'(x) = 2x(L_k'(x))^2 / (k(k+1)) \geq 0 \text{ sur } [0, 1].$$

La fonction f_k est donc **croissante sur $[0, 1]$** .

Q37. Sur $[0, 1]$, la croissance donne $f_k(x) \leq f_k(1)$. Or le second terme de f_k s'annule en 1 — le facteur $1 - x^2$ —, donc

$$f_k(1) = L_k(1)^2 = 1 \text{ d'après Q33.}$$

Comme le second terme de f_k est positif sur $[0, 1]$, on a $L_k(x)^2 \leq f_k(x) \leq 1$, d'où $|L_k(x)| \leq 1$.

Sur $[-1, 0]$, la parité (Q32) donne $|L_k(-x)| = |L_k(x)| \leq 1$. Finalement

$$\forall x \in [-1, 1], |L_k(x)| \leq 1.$$

La borne est atteinte en ± 1 : les polynômes de Legendre oscillent entre -1 et 1 sur tout l'intervalle, ce qui les rend commodes pour l'approximation.

Partie E · IV et V — Récurrence et fonction génératrice (Q38 à Q42)

- Q38, Q39 — la relation à trois termes explicitée pour les L_k .
- Q40 — le rayon de convergence de $\sum L_k(x) t^k$ est au moins 1.
- Q41, Q42 — l'équation différentielle vérifiée par la somme S , puis son expression close.

Q40. D'après Q37, $|L_k(x)| \leq 1$ pour $x \in [-1, 1]$, donc

$$|L_k(x) t^k| \leq |t|^k.$$

La série est donc absolument convergente dès que $|t| < 1$, par comparaison avec une série géométrique : le rayon de convergence est ≥ 1 .

Q38. D'après **Q14**, a_k est le quotient des coefficients dominants de L_{k+1} et de L_k , calculés en **Q31** :

$$a_k = \frac{[(2k+2)! / (2^{k+1}((k+1)!)^2)] \cdot [2^k k!^2 / (2k)!]}{(2k+2)(2k+1)/(2(k+1)^2)},$$

soit après simplification par $2(k+1)$:

$$a_k = (2k+1)/(k+1).$$

Q39. La relation de **Q15** s'écrit $L_{k+1} = (a_k x + b_k)L_k + c_k L_{k-1}$.

Le terme b_k est nul par parité. En effet L_{k+1} et xL_k ont la parité de $k+1$, ainsi que $c_k L_{k-1}$; le terme $b_k L_k$, lui, aurait la parité de k . Il doit donc être nul.

Détermination de c_k . Évaluons en $x = 1$, où tous les L_j valent 1 (**Q33**) :

$$1 = (2k+1)/(k+1) + c_k, \text{ d'où } c_k = -k/(k+1).$$

D'où la relation classique

$$L_{k+1} = ((2k+1)/(k+1)) \cdot xL_k - (k/(k+1)) \cdot L_{k-1}.$$

Q41. Multiplions la relation de **Q39**, écrite sous la forme $(k+1)L_{k+1} = (2k+1)xL_k - kL_{k-1}$, par t^k et sommons sur $k \geq 0$ — avec la convention $L_{-1} = 0$.

Chaque somme se reconnaît, à l'intérieur du disque de convergence :

- $\sum (k+1)L_{k+1}t^k = S'(t)$;
- $\sum (2k+1)xL_k t^k = 2xt \cdot S'(t) + x \cdot S(t)$, en séparant $2k$ et 1 ;
- $\sum kL_{k-1}t^k = t \cdot \sum (j+1)L_j t^j = t^2 S'(t) + tS(t)$, par le changement $j = k-1$.

En reportant :

$$S' = 2xtS' + xS - t^2S' - tS,$$

soit, en regroupant :

$$(1 - 2tx + t^2)S'(t) + (t - x)S(t) = 0.$$

Q42. Posons $D(t) = 1 - 2tx + t^2$, de sorte que $D'(t) = 2(t - x)$. L'équation se réécrit

$$S'/S = -D'/(2D),$$

équation à variables séparées, valable tant que D ne s'annule pas — c'est le cas sur $] -1, 1[$ pour $x \in [-1, 1]$, puisque $D(t) = (t - x)^2 + 1 - x^2 \geq 0$ ne s'annule que si $x = \pm 1$ et $t = x$.

En intégrant : $\ln|S| = -\frac{1}{2}\ln D + C$, soit $S(t) = K/\sqrt{D(t)}$.

La condition initiale $S(0) = L_0(x) = 1$ et $D(0) = 1$ donnent $K = 1$:

$$\sum_{k \geq 0} L_k(x) t^k = 1/\sqrt{(1 - 2tx + t^2)}.$$

C'est la **fonction génératrice** des polynômes de Legendre. Elle a une origine physique : $1/\sqrt{(1 - 2tx + t^2)}$ est le développement de l'inverse de la distance entre deux points, ce qui explique l'omniprésence de ces polynômes en électrostatique et en gravitation.