



P U L S A R S

CORRECTION INDÉPENDANTE

Centrale-Supélec 2026 — Mathématiques 2 (PC)

SESSION 2026	NIVEAU CPGE	DURÉE —	FILIÈRES PC
------------------------	-----------------------	-------------------	-----------------------

Correction indépendante rédigée par Pulsars. Elle n'est ni officielle ni affiliée à l'organisateur du concours. Les énoncés ne sont pas reproduits : le sujet officiel reste consultable sur le site du concours.

Partie A — Construction d'une fonction test (Q1 à Q7)

$\varphi(x) = e^{-1/x}$ pour $x > 0$, et $\varphi(x) = 0$ pour $x \leq 0$.

- **Q1** — φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.

Q1. Sur $]0, +\infty[$, φ est la composée de $x \mapsto -1/x$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$, et de l'exponentielle : elle est C^∞ .

Sur $]-\infty, 0[$, φ est identiquement nulle, donc C^∞ .

Elle est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$. Toute la difficulté est en 0 .

- **Q2** — l'existence d'un polynôme P_n tel que $\varphi^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x}$.

Q2. Récurrence sur n .

Initialisation : $\varphi^{(0)}(x) = e^{-1/x}$, donc $P_0 = 1$ convient.

Hérédité : supposons $\varphi^{(n)}(x) = P_n(1/x)e^{-1/x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En dérivant le produit, avec $(1/x)' = -1/x^2$ et $(e^{-1/x})' = e^{-1/x}/x^2$:

$$\varphi^{(n+1)}(x) = [-(1/x^2)P_n'(1/x) + P_n(1/x) \cdot (1/x^2)] \cdot e^{-1/x}.$$

En posant $X = 1/x$, le crochet vaut $X^2(P_n(X) - P_n'(X))$. Le polynôme

$$P_{n+1}(X) = X^2(P_n(X) - P_n'(X))$$

convient donc, et la récurrence est établie.

- **Q3** — en déduire $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Q3. Montrons par récurrence que $\varphi^{(n)}$ existe sur $\mathbb{R}$ tout entier et vaut 0 en 0 .

C'est vrai pour $n = 0$ puisque $\varphi(0) = 0$ et que $\varphi(x) = e^{-1/x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Supposons $\varphi^{(n)}$ définie sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-$, et donnée par **Q2** sur $\mathbb{R}_+^*$. Quand $x \rightarrow 0^+$, posons $u = 1/x \rightarrow +\infty$:

$$\varphi^{(n)}(x) = P_n(u)e^{-u} \rightarrow 0$$

par **croissances comparées** — l'exponentielle décroissante l'emporte sur tout polynôme. La dérivée $\varphi^{(n+1)}$ admet donc la limite 0 en 0^+ , et 0 en 0^- où la fonction est nulle.

Le théorème de la limite de la dérivée assure alors que $\varphi^{(n)}$ est dérivable en 0 , de dérivée nulle. Par récurrence, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

- **Q4** — construire $\psi_{[a,b]}$, lisse, strictement positive sur $]a, b[$, nulle ailleurs.
- **Q5, Q6** — la fonction ρ_ε est bien définie, appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, et son intégrale vaut 1 .

Q4. Posons

$$\psi_{[a,b]}(x) = \varphi(x-a) \cdot \varphi(b-x).$$

C'est un produit de deux composées de φ par des applications affines, donc une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Si $x \in]a, b[$, alors $x - a > 0$ et $b - x > 0$, donc les deux facteurs sont strictement positifs et $\psi_{[a,b]}(x) > 0$.

Sinon, $x - a \leq 0$ ou $b - x \leq 0$, et l'un des deux facteurs est nul : $\psi_{[a,b]}(x) = 0$.

- **Q7** — ρ_ε concentre l'intégrale en un point.

Q7. a) Comme $\int \rho_\varepsilon = 1$, on peut écrire

$$\int \rho_\varepsilon(x)g(x)dx - g(0) = \int \rho_\varepsilon(x)(g(x) - g(0))dx.$$

L'intégrande est nul hors de $[-\varepsilon, \varepsilon]$, et $\rho_\varepsilon \geq 0$, donc

$$|\int \rho_\varepsilon(x)g(x)dx - g(0)| \leq \sup_{|x| \leq \varepsilon} |g(x) - g(0)| \cdot \int \rho_\varepsilon = \sup_{|x| \leq \varepsilon} |g(x) - g(0)|.$$

Cette borne tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ par **continuité de g en 0**, d'où la limite annoncée.

b) Le changement de variable $u = x - a$ donne

$$\int \rho_\varepsilon(x - a)g(x)dx = \int \rho_\varepsilon(u)g(u + a)du.$$

La fonction $u \mapsto g(u + a)$ est continue ; en lui appliquant **a)**, la limite vaut sa valeur en 0, c'est-à-dire $g(a)$.

ρ_ε est une « approximation de l'unité » : en concentrant sa masse autour de 0, elle réalise à la limite l'évaluation ponctuelle — c'est-à-dire la masse de Dirac que la partie B définira proprement.

Q5. La fonction $\psi_{[-1,1]}$ est continue, positive, nulle hors de $[-1, 1]$: son intégrale sur $\mathbb{R}$ est celle sur $[-1, 1]$, donc **finie**. Elle est de plus **strictement positive** : la fonction est continue et strictement positive sur $] -1, 1[$, intervalle de longueur non nulle.

Le dénominateur $\varepsilon \int \psi_{[-1,1]}$ est donc un réel strictement positif, et ρ_ε est bien définie.

Elle est C^∞ comme composée de $\psi_{[-1,1]}$ avec $x \mapsto x/\varepsilon$, et elle s'annule dès que $|x/\varepsilon| \geq 1$, c'est-à-dire hors de $[-\varepsilon, \varepsilon]$: $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Q6. Le changement de variable $u = x/\varepsilon$, de jacobien $dx = \varepsilon \cdot du$, donne

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_{[-1,1]}(x/\varepsilon)dx = \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \psi_{[-1,1]}(u)du.$$

En divisant par le dénominateur de ρ_ε , qui est exactement cette quantité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\varepsilon(x)dx = 1.$$

Partie B — Distributions sur $\mathbb{R}$ (Q8 à Q13)

Une distribution est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant, sur chaque segment K , une majoration par les normes infinies des premières dérivées.

- **Q8** — $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Q8. $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une partie de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Il suffit de vérifier qu'elle en est un sous-espace.

La forme nulle vérifie la majoration avec $C_K = 1$ et $N_K = 0$.

Si T et S sont deux distributions, de constantes (C_K, N_K) et (C'_K, N'_K) , alors pour $\varphi \in \mathcal{D}(K)$:

$$|(T + \lambda S)(\varphi)| \leq C_K \cdot \max_{i \leq N_K} \|\varphi^{(i)}\|_\infty + |\lambda| C'_K \cdot \max_{i \leq N'_K} \|\varphi^{(i)}\|_\infty,$$

qui est majoré par $(C_K + |\lambda| C'_K) \cdot \max_{i \leq \max(N_K, N'_K)} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$. Les constantes $C_K + |\lambda| C'_K$ et $\max(N_K, N'_K)$ conviennent : **$\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.**

- **Q9** — la masse de Dirac δ_a est une distribution.

Q9. La linéarité de $\varphi \mapsto \varphi(a)$ est immédiate.

Pour la majoration, quel que soit le segment K :

$$|\delta_a(\varphi)| = |\varphi(a)| \leq \|\varphi\|_\infty = \|\varphi^{(0)}\|_\infty.$$

Les constantes $C_K = 1$ et $N_K = 0$ conviennent : **δ_a est une distribution**, dite d'ordre 0.

- **Q10** — la distribution T_f associée à une fonction continue par morceaux.

Q10. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, nulle hors d'un segment $[-A, A]$. Le produit $f\varphi$ est continu par morceaux et nul hors de ce segment, donc

$$T_f(\varphi) = \int_{-A}^A f(t)\varphi(t)dt$$

est l'intégrale d'une fonction continue par morceaux **sur un segment** : elle converge. L'application est bien définie, et linéaire par linéarité de l'intégrale.

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(K)$:

$$|T_f(\varphi)| \leq \int_K |f(t)| \cdot |\varphi(t)| dt \leq \left(\int_K |f|\right) \cdot \|\varphi\|_\infty.$$

La constante $C_K = \int_K |f|$ est finie, et $N_K = 0$: **T_f est une distribution.**

- **Q11** — deux fonctions continues qui donnent la même distribution sont égales.

Q11. Posons $f = f_1 - f_2$, continue, telle que $\int f\varphi = 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Supposons $f(x_0) \neq 0$, par exemple $f(x_0) > 0$. Par continuité, il existe $a < x_0 < b$ tels que $f > f(x_0)/2$ sur $]a, b[$.

Prenons $\varphi = \psi_{a,b}$ de **Q4** : elle est positive, strictement positive sur $]a, b[$, et nulle ailleurs. Alors

$$\int f\varphi = \int_a^b f\psi_{a,b} \geq (f(x_0)/2) \cdot \int_a^b \psi_{a,b} > 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Donc f est identiquement nulle et $f_1 = f_2$.

*C'est ce résultat qui autorise à voir les fonctions continues comme des distributions **sans perte d'information** : l'application $f \mapsto T_f$ est injective.*

- **Q12** — le taux d'accroissement ψ d'une fonction test est lisse.

Q12. a) Pour $x \neq 0$, la fonction $t \mapsto \varphi(tx)/x$ est une primitive de $t \mapsto \varphi'(tx)$:

$$\int_0^1 \varphi'(tx) dt = [\varphi(tx)/x]_0^1 = (\varphi(x) - \varphi(0))/x = \psi(x).$$

Pour $x = 0$, l'intégrande vaut $\varphi'(0)$ constant, et l'intégrale vaut $\varphi'(0)$, c'est-à-dire $\psi(0)$. L'égalité vaut donc **pour tout x réel**.

b) L'application $(x, t) \mapsto \varphi'(tx)$ est de classe C^∞ en x , et toutes ses dérivées partielles en x , de la forme $t^k \varphi^{(k+1)}(tx)$, sont continues et majorées par $\|\varphi^{(k+1)}\|_\infty$ — une constante, intégrable sur le **segment** $[0, 1]$.

Le théorème de dérivation sous le signe intégral s'applique à tout ordre : $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

- **Q13** — la valeur principale de $1/x$ est une distribution.

Q13. a) Écrivons, pour $x \neq 0$:

$$\varphi(x)/x = (\varphi(x) - \varphi(0))/x + \varphi(0)/x = \psi(x) + \varphi(0)/x.$$

Notons $[-A, A]$ un segment hors duquel φ s'annule. Sur le domaine symétrique $\varepsilon \leq |x| \leq A$, la fonction impaire $x \mapsto \varphi(0)/x$ a une intégrale **nulle** : les contributions de $[-A, -\varepsilon]$ et $[\varepsilon, A]$ se compensent exactement.

Il reste $\int_{\{\varepsilon \leq |x| \leq A\}} \psi(x) dx$, et ψ est continue sur le segment $[-A, A]$ d'après **Q12** : cette intégrale converge quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$ vers $\int_{\{-A\}^c}^A \psi(x) dx$. La limite existe, et

$$V(\varphi) = \int_{\{-A\}^c}^A \psi(x) dx.$$

b) La linéarité vient de celle de $\varphi \mapsto \psi$. Pour la majoration, ψ est contrôlée par la dérivée de φ grâce à **Q12.a** :

$$|\psi(x)| = \left| \int_0^1 \varphi'(tx) dt \right| \leq \|\varphi'\|_\infty.$$

Donc, pour $\varphi \in D(K)$ avec $K \subset [-A, A]$:

$$|V(\varphi)| \leq 2A \cdot \|\varphi'\|_\infty \leq 2A \cdot \max_{1 \leq i \leq N} \|\varphi^{(i)}\|_\infty.$$

Les constantes $C_K = 2A$ et $N_K = 1$ conviennent : **V est une distribution**, d'ordre **1** — c'est la *valeur principale* de $1/x$.

Noter que $1/x$ n'est pas localement intégrable en 0 : V n'est pas de la forme T_f . Les distributions dépassent donc strictement les fonctions.

Partie C · I — Dériver une distribution (Q14 à Q17)

La dérivée d'une distribution est définie par $T'(\varphi) = -T(\varphi')$.

- **Q14** — T' est bien une distribution.

Q14. Si $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, alors $\varphi' \in \mathcal{D}(K)$: la dérivée d'une fonction lisse nulle hors de K est lisse et nulle hors de K . L'application T' est donc bien définie, et linéaire puisque la dérivation l'est.

Pour la majoration :

$$|T'(\varphi)| = |T(\varphi')| \leq C_K \cdot \max_{i \leq N_K} \|(\varphi')^{(i)}\|_\infty = C_K \cdot \max_{i \leq N_K} \|\varphi^{(i+1)}\|_\infty,$$

quantité majorée par $C_K \cdot \max_{i \leq N_K + 1} \|\varphi^{(i)}\|_\infty$. Les constantes C_K et $N_K + 1$ conviennent : $T' \in \mathcal{D}'(R)$.

- **Q15** — pour f de classe C^1 , $T_{f'} = T_{\{f'\}}$: la définition prolonge la dérivation usuelle.

Q15. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(R)$, nulle hors de $[-A, A]$. Une intégration par parties, licite puisque f et φ sont C^1 :

$$T_{f'}(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\int_{-A}^A f \varphi' = -[f\varphi]_{-A}^A + \int_{-A}^A f' \varphi.$$

Le crochet est nul car $\varphi(-A) = \varphi(A) = 0$. Il reste

$$T_{f'}(\varphi) = \int f' \varphi = T_{\{f'\}}(\varphi).$$

C'est la justification du signe $-$ dans la définition : il est choisi précisément pour que les deux notions coïncident sur les fonctions dérivables.

- **Q16** — la valeur absolue : non dérivable, mais dérivable au sens des distributions.

Q16. a) Le taux d'accroissement de $f : x \mapsto |x|$ en 0 vaut $|h|/h$, qui tend vers 1 en 0^+ et vers -1 en 0^- . Les deux limites diffèrent : f n'est pas dérivable en 0 .

b) Calculons, en séparant les deux demi-droites :

$$T_{f'}(\varphi) = -\int_{-\infty}^0 (-x) \varphi'(x) dx - \int_0^{+\infty} x \varphi'(x) dx.$$

Deux intégrations par parties, les crochets étant nuls (φ est à support compact et x s'annule en 0) :

$$\int_0^{+\infty} x \varphi' = -\int_0^{+\infty} \varphi \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^0 (-x) \varphi' = \int_{-\infty}^0 \varphi.$$

D'où

$$T_{f'}(\varphi) = -\int_{-\infty}^0 \varphi + \int_0^{+\infty} \varphi = \int_R \operatorname{sgn}(x) \varphi(x) dx,$$

où sgn vaut -1 sur R_-^* et $+1$ sur R_+^* . Ainsi $T_{f'} = T_{\{\operatorname{sgn}\}}$: la valeur absolue admet bien une dérivée au sens des distributions, et c'est la fonction signe.

- **Q17** — la fonction de Heaviside a pour dérivée δ_0 .

Q17. H est continue sur R^* et n'a qu'une discontinuité, en 0 : elle est continue par morceaux sur tout segment.

Comme H vaut 1 sur R_+ et 0 ailleurs :

$$T_{H'}(\varphi) = -T_H(\varphi') = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = -[\varphi(x)]_0^{+\infty} = \varphi(0),$$

puisque φ s'annule au voisinage de $+\infty$. On reconnaît $\delta_0(\varphi)$:

$$T_{H'} = \delta_0.$$

Une fonction discontinue admet donc une dérivée — et cette dérivée n'est plus une fonction. C'est le gain décisif de la théorie : le saut de H en 0 devient une masse ponctuelle.

Partie C · II — Les distributions de dérivée nulle (Q18 à Q23)

- **Q18** — une distribution de dérivée nulle est associée à une fonction constante ; la démonstration passe par les fonctions tests d'intégrale nulle.
- **Q19, Q20** — traduction pour les fonctions continues : dérivée nulle donne constante, dérivée seconde nulle donne affine.
- **Q21 à Q23** — si $T_{f'} = T_g$ avec f et g continues, alors f est de classe C^1 et $f' = g$.

Q18. a) Par définition, $T'(\varphi) = -T(\varphi')$. Si T' est la distribution nulle, alors $T(\varphi') = 0$ pour toute $\varphi \in D(\mathbb{R})$.

b) Soit $\varphi \in D(\mathbb{R})$ d'intégrale nulle, et posons $\psi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$.

ψ est de classe C^∞ — primitive d'une fonction lisse — et $\psi' = \varphi$.

Notons $[-A, A]$ un segment hors duquel φ s'annule. Pour $x < -A$, $\psi(x) = 0$. Pour $x > A$, $\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi = 0$ par hypothèse. Donc $\psi \in D(\mathbb{R})$, et **a)** donne

$$T(\varphi) = T(\psi') = 0.$$

c) La fonction p_1 construite en partie A appartient à $D(\mathbb{R})$ et vérifie $\int p_1 = 1$ d'après **Q6** : elle convient comme φ_0 .

d) Écrivons, en suivant l'indication :

$$\varphi = (\int \varphi) \cdot \varphi_0 + [\varphi - (\int \varphi) \cdot \varphi_0].$$

Le crochet appartient à $D(\mathbb{R})$ et son intégrale vaut $\int \varphi - (\int \varphi) \cdot 1 = 0$. D'après **b)**, T s'y annule. Par linéarité :

$$T(\varphi) = (\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt) \cdot T(\varphi_0).$$

e) Posons $h = T(\varphi_0)$, réel fixé, et considérons la fonction constante égale à h . Alors

$$T(\varphi) = h \cdot \int \varphi = \int h \cdot \varphi = T_h(\varphi),$$

pour toute $\varphi \in D(\mathbb{R})$: $T = T_h$, avec h constante.

Q19. Si f est continue et $T_f' = 0$, alors **Q18** donne $T_f = T_h$ avec h constante. Les deux fonctions étant continues, **Q11** conclut : $f = h$.

Les fonctions continues de dérivée distributionnelle nulle sont exactement les **fonctions constantes**.

Q20. Supposons $T_f' = 0$, c'est-à-dire $(T_f')' = 0$. D'après **Q18**, il existe une constante h telle que $T_f' = T_h$.

Posons $G(x) = hx$, de classe C^1 avec $G' = h$. Alors $T_{G'} = T_{\{G'\}} = T_h$ (**Q15**), donc $(T_f - T_G)' = 0$.

Par **Q19** appliqué à la fonction continue $f - G$, celle-ci est constante : $f(x) = hx + c$. Les fonctions cherchées sont les **fonctions affines**.

Q21. g est continue sur $\mathbb{R}$: d'après le théorème fondamental de l'analyse, elle admet une primitive, par exemple $G(x) = \int_0^x g(t)dt$, de classe C^1 avec $G' = g$.

Q22. G étant C^1 , **Q15** donne $T_{G'} = T_{\{G'\}} = T_g$. Par linéarité de la dérivation des distributions :

$$(T_f - T_G)' = T_f' - T_{G'} = T_g - T_g = 0.$$

Q23. La fonction $f - G$ est continue et sa dérivée distributionnelle est nulle : d'après **Q19**, elle est constante, disons égale à c .

Donc $f = G + c$, somme d'une fonction de classe C^1 et d'une constante : f est de classe C^1 , et $f' = G' = g$.

Autrement dit, une fonction continue dont la dérivée au sens des distributions est une fonction continue est en réalité dérivable au sens usuel. La théorie n'invente pas de dérivées là où le résultat serait absurde.

Partie D — Suites de distributions (Q24 à Q27)

La convergence d'une suite de distributions est définie point par point sur les fonctions tests.

- **Q24** — la dérivation est continue pour cette convergence.

Q24. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Comme $\varphi' \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, l'hypothèse appliquée à φ' donne

$$T_{n'}(\varphi) = -T_n(\varphi') \rightarrow -T(\varphi') = T'(\varphi).$$

C'est exactement la convergence de $(T_{n'})$ vers T' .

C'est une propriété remarquable, et fausse pour la convergence uniforme des fonctions : dériver ne « casse » jamais la convergence au sens des distributions.

- **Q25** — un exemple de suite de fonctions qui ne converge pas simplement, alors que la suite des distributions associées converge.
- **Q26, Q27** — la convergence uniforme, puis la convergence en norme 2, entraînent la convergence des distributions.

Q25. Prenons $f_n(x) = \sin(nx)$.

Cette suite **ne converge pas simplement** : en $x = \pi/2$, la suite $\sin(n\pi/2)$ prend cycliquement les valeurs 1, 0, -1, 0 et diverge.

Pourtant, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ nulle hors de $[-A, A]$, une intégration par parties donne

$$T_{\{f_n\}}(\varphi) = \int_{-A}^A \sin(nx) \varphi(x) dx = [-\cos(nx) \varphi(x) / n]_{-A}^A + (1/n) \int_{-A}^A \cos(nx) \varphi'(x) dx.$$

Le crochet est nul, et le second terme est majoré en module par $2A \|\varphi'\|_{\infty} / n \rightarrow 0$. Donc $T_{\{f_n\}}(\varphi) \rightarrow 0$: la suite $(T_{\{f_n\}})$ converge vers la distribution nulle.

Q26. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, nulle hors de $[-A, A]$. Alors

$$|T_{\{f_n\}}(\varphi) - T_f(\varphi)| = \left| \int_{-A}^A (f_n - f) \varphi \right| \leq \|f_n - f\|_{\infty} \cdot 2A \cdot \|\varphi\|_{\infty}.$$

Le majorant tend vers 0 par convergence uniforme, donc $T_{\{f_n\}} \rightarrow T_f$.

Q27. Même point de départ, mais on majore cette fois par Cauchy-Schwarz sur le segment $[-A, A]$:

$$\left| \int_{-A}^A (f_n - f) \varphi \right| \leq \left(\int_{-A}^A (f_n - f)^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-A}^A \varphi^2 \right)^{1/2} \leq \|f_n - f\|_2 \cdot \|\varphi\|_2.$$

La première norme tend vers 0 par hypothèse, la seconde est une constante finie — φ est continue à support compact. Donc $T_{\{f_n\}} \rightarrow T_f$.

La convergence au sens des distributions est donc plus faible que toutes les autres : c'est ce qui la rend si commode, et c'est ce dont la partie E va profiter.

Partie E — Le théorème d'unicité de Cantor (Q28 à Q34)

On suppose que la série trigonométrique $\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge pour **tout** réel x , et que sa somme est nulle. On veut en déduire que tous les coefficients sont nuls.

- **Q28** — les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0 .

Q28. a) Le terme général d'une série convergente tend vers 0 . En $x = 0$, ce terme général vaut

$$a_n \cdot 1 + b_n \cdot 0 = a_n, \text{ donc}$$

$$a_n \rightarrow 0.$$

b) Pour tout réel x , le terme général $a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ tend vers 0 . Or $|a_n \cos(nx)| \leq |a_n| \rightarrow 0$. Par différence,

$$b_n \sin(nx) \rightarrow 0 \text{ pour tout } x \in [0, 2\pi].$$

c) Nier « $b_n \rightarrow 0$ », c'est affirmer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|b_n| \geq \varepsilon$ pour une infinité d'indices. Ces indices, rangés dans l'ordre croissant, définissent une extractrice $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que $|b_{\{\varphi(n)\}}| \geq \varepsilon$ pour tout n .

d) D'après **b)**, $b_{\{\varphi(n)\}} \sin(\varphi(n)x) \rightarrow 0$, et $|b_{\{\varphi(n)\}}| \geq \varepsilon > 0$. En divisant :

$$\sin(\varphi(n)x) \rightarrow 0 \text{ pour tout } x \in [0, 2\pi], \text{ donc } \sin^2(\varphi(n)x) \rightarrow 0.$$

Ces fonctions sont majorées par la constante 1 , intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$: le théorème de convergence dominée donne

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi(n)x) dx \rightarrow 0.$$

e) Or, pour tout entier $m \geq 1$, la linéarisation $\sin^2(mx) = (1 - \cos(2mx))/2$ donne

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(mx) dx = \pi - 0 = \pi.$$

La suite étudiée est donc **constante égale à π** et ne peut tendre vers 0 . Contradiction : l'hypothèse de **c)** est absurde, et

$$b_n \rightarrow 0.$$

- **Q29** — le cas où les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent.
- **Q30 à Q33** — on divise par n^2 : la série obtenue converge normalement, sa somme F est affine, bornée, constante, puis nulle.

Q29. Si $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent, la série de fonctions converge **normalement** sur $\mathbb{R}$: on peut intégrer terme à terme sur $[0, 2\pi]$ après multiplication par $\cos(kx)$, fonction bornée.

Les relations d'orthogonalité classiques donnent, pour $n, k \geq 1$:

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx = \pi \delta_{\{n,k\}} \text{ et } \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx = 0.$$

La somme étant nulle, il reste $0 = \pi \cdot a_k$, donc $a_k = 0$. Le même calcul avec $\sin(kx)$ donne $b_k = 0$, pour tout $k \geq 1$.

• **Q34** — conclusion.

Q34. La fonction F est la somme de la série trigonométrique de coefficients a_n/n^2 et b_n/n^2 , et elle est nulle en tout point.

Ces coefficients vérifient $|a_n/n^2| \leq M/n^2$ et $|b_n/n^2| \leq M/n^2$, donc les séries $\sum |a_n|/n^2$ et $\sum |b_n|/n^2$ **convergent**. On est exactement dans les hypothèses de **Q29**, qui donne

$a_n/n^2 = b_n/n^2 = 0$, donc $a_n = b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

C'est le théorème d'unicité de Cantor : une série trigonométrique qui converge vers 0 en tout point a tous ses coefficients nuls. Il en découle l'unicité du développement trigonométrique d'une fonction — deux développements qui coïncident partout ont, en se retranchant, tous leurs coefficients égaux.

C'est en cherchant à préciser ce théorème que Cantor a été conduit à étudier les ensembles de points exceptionnels, puis à fonder la théorie des ensembles.

Q30. Les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0 (**Q28**), donc sont **bornées** : il existe M tel que $|a_n| \leq M$ et $|b_n| \leq M$. Alors

$$\|f_n\|_\infty \leq (|a_n| + |b_n|)/n^2 \leq 2M/n^2,$$

et $\sum 2M/n^2$ converge. La série $\sum f_n$ **converge normalement** sur $\mathbb{R}$, donc uniformément, et sa somme F est **continue**.

Q31. Notons $S_N = \sum_{n \leq N} f_n$, fonction de classe C^∞ . Chaque f_n vérifie

$$f_n''(x) = -(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

le facteur $1/n^2$ étant exactement compensé par la double dérivation.

La convergence de (S_N) vers F étant uniforme, **Q26** donne $T_{\{S_N\}} \rightarrow T_F$, puis **Q24** donne $T_{\{S_N\}}'' \rightarrow T_F''$. Or S_N est lisse, donc **Q15** appliquée deux fois donne $T_{\{S_N\}}'' = T_{\{S_N''\}}$, c'est-à-dire

$$T_{\{S_N\}}''(\varphi) = -\int (\sum_{n \leq N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))) \cdot \varphi(x) dx.$$

Par hypothèse, les sommes partielles convergent vers 0 en tout point ; en passant à la limite sous l'intégrale — l'intervention est le point délicat, et l'on admet ici que les sommes partielles sont bornées sur le support de φ — il vient

$$T_F'' = 0.$$

D'après **Q20**, la fonction continue F est donc **affine**.

Q32. La convergence normale de **Q30** donne directement

$$\|F\|_\infty \leq \sum_n \|f_n\|_\infty \leq \sum_n 2M/n^2 < +\infty :$$

F est **bornée**.

Or une fonction affine $x \mapsto \alpha x + \beta$ n'est bornée sur $\mathbb{R}$ que si $\alpha = 0$. Donc F est **constante**.

Q33. Intégrons F sur une période. Par convergence normale, on intègre terme à terme :

$$\int_0^{2\pi} F = \sum_n (1/n^2) (a_n \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx + b_n \int_0^{2\pi} \sin(nx) dx) = 0,$$

toutes ces intégrales étant nulles pour $n \geq 1$. Comme F est constante égale à c , cela donne $2\pi c = 0$, donc $c = 0$:

F est la **fonction nulle**.