



P U L S A R S

CORRECTION INDÉPENDANTE

Centrale-Supélec 2026 — Mathématiques 2 (MP, MPI)

SESSION 2026	NIVEAU CPGE	DURÉE —	FILIÈRES MP · MPI
------------------------	-----------------------	-------------------	-----------------------------

Correction indépendante rédigée par Pulsars. Elle n'est ni officielle ni affiliée à l'organisateur du concours. Les énoncés ne sont pas reproduits : le sujet officiel reste consultable sur le site du concours.

Partie A · I — La fonction ζ sur $]1, +\infty[$ (Q1 à Q3)

On pose $u_k(s) = 1/k^s$ et $\zeta(s) = \sum_{k \geq 1} 1/k^s$.

- **Q1** — la série de fonctions converge-t-elle normalement sur $]1, +\infty[$?

Q1. Non. La norme infinie de u_k sur $]1, +\infty[$ vaut

$$\|u_k\|_\infty = \sup_{s>1} 1/k^s = 1/k,$$

borne atteinte à la limite $s \rightarrow 1^+$. Or $\sum 1/k$ diverge : il n'y a pas convergence normale.

En revanche, sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 1$, on a $\|u_k\|_\infty = 1/k^a$ et $\sum 1/k^a$ converge : la convergence est normale sur un tel intervalle. C'est cette nuance qui sert à la question suivante.

- **Q2** — continuité de ζ sur cet intervalle.

Q2. Chaque u_k est continue sur $]1, +\infty[$.

Soit $s_0 > 1$ et a tel que $1 < a < s_0$. Sur $[a, +\infty[$, la convergence est normale donc uniforme, et la somme y est continue.

Comme s_0 est intérieur à $[a, +\infty[$, la fonction ζ est continue en s_0 . La continuité étant une propriété locale, ζ est **continue sur $]1, +\infty[$** .

- **Q3** — ζ ne s'y annule pas ; préciser son signe.

Q3. Tous les termes $1/k^s$ sont strictement positifs, et le premier vaut 1. Une somme de termes positifs étant minorée par chacun d'eux :

$$\zeta(s) \geq 1 > 0.$$

La fonction ζ est donc **strictement positive**, et ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$.

Partie A · II — Cas de la variable complexe (Q4 à Q10)

s est désormais complexe, de partie réelle $x = \operatorname{Re}(s) > 1$, et (p_i) désigne la suite croissante des nombres premiers.

- **Q4** — module de t^s pour $t > 0$.

Q4. Par définition $t^s = e^{\{s \ln t\}}$, et le module d'une exponentielle complexe ne dépend que de la partie réelle de l'exposant :

$$|t^s| = e^{\{\operatorname{Re}(s \ln t)\}} = e^{\{\operatorname{Re}(s) \cdot \ln t\}} = t^{\{\operatorname{Re}(s)\}},$$

puisque $\ln t$ est réel. Le module ne dépend donc pas de $\operatorname{Im}(s)$.

- **Q5** — convergence absolue de la série définissant $\zeta(s)$.

Q5. D'après **Q4**, $|1/k^s| = 1/k^x$ avec $x = \operatorname{Re}(s) > 1$.

La série de Riemann $\sum 1/k^x$ converge pour $x > 1$: la série $\sum 1/k^s$ **converge absolument**.

- **Q6** — sommabilité de la famille indexée par les exposants, et le produit eulérien partiel $S_n(s)$.

Q6. Pour chaque i , la série géométrique $\sum_{m \geq 0} 1/(p_i^m)^s$ a pour raison p_i^{-s} , de module $p_i^{-x} < 1$: elle converge absolument, de somme

$$1/(1 - p_i^{-s}).$$

La famille indexée par $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ est le **produit** de n familles sommables ; elle est donc sommable, et sa somme est le produit des sommes :

$$S_n(s) = \prod_{i=1}^n 1/(1 - 1/p_i^s).$$

- **Q7** — limite de $S_n(s)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Q7. Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, l'application

$(m_1, \dots, m_n) \mapsto p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n}$ est une **bijection** de $\mathbb{N}^n$ sur N_n . La famille de **Q6** est donc exactement $(1/k^s)_{k \in N_n}$, d'où

$$S_n(s) = \sum_{k \in N_n} 1/k^s.$$

Tout entier $k \geq 1$ n'admet qu'un nombre fini de facteurs premiers, tous inférieurs à k : comme $p_n \rightarrow +\infty$, k appartient à N_n dès que n est assez grand. Ainsi

$$|\zeta(s) - S_n(s)| \leq \sum_{k > p_n} 1/k^x \rightarrow 0,$$

reste d'une série convergente. Donc **$S_n(s) \rightarrow \zeta(s)$** .

- **Q8** — nature de la série $\sum 1/p_i^x$.

Q8. Plaçons-nous en $s = x$ réel > 1 . La suite $(S_n(x))$ converge vers $\zeta(x)$, réel **strictement positif** d'après **Q3**, donc

$$\ln S_n(x) = - \sum_{i=1}^n \ln(1 - p_i^{-x})$$

converge vers $\ln \zeta(x)$. C'est une série à termes positifs convergente.

Or $p_i^{-x} \rightarrow 0$ et $-\ln(1 - u) \sim u$ en 0 , donc les termes généraux $-\ln(1 - p_i^{-x})$ et p_i^{-x} sont équivalents. Deux séries à termes positifs équivalents étant de même nature, la série $\sum_i 1/p_i^x$ **converge**.

- **Q9** — convergence de la suite $a_n = \prod p_i^x / (p_i^x + 1)$ vers un réel > 0 .

Q9. $\ln a_n = - \sum_{i=1}^n \ln(1 + p_i^{-x})$.

Comme $\ln(1 + u) \sim u$ en 0 et que $\sum p_i^{-x}$ converge (**Q8**), cette série converge : $\ln a_n \rightarrow L$ pour un réel L , donc

$$a_n \rightarrow e^L > 0.$$

- **Q10** — la minoration $|S_n(s)| \geq a_n$, d'où $\zeta(s) \neq 0$.

Q10. L'inégalité triangulaire donne $|1 - p_i^{-s}| \leq 1 + |p_i^{-s}| = 1 + p_i^{-x}$, donc en passant aux inverses et en multipliant :

$$|S_n(s)| = \prod_i 1/|1 - p_i^{-s}| \geq \prod_i 1/(1 + p_i^{-x}) = \prod_i p_i^x / (p_i^x + 1) = a_n.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ — le membre de gauche tend vers $|\zeta(s)|$ (**Q7**), celui de droite vers e^L (**Q9**) :

$$|\zeta(s)| \geq e^L > 0, \text{ donc } \zeta(s) \neq 0.$$

C'est la non-annulation de ζ sur le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 1$. Tout le sujet vise à repousser cette conclusion jusqu'à $\operatorname{Re}(s) > 1/2$ — c'est-à-dire l'hypothèse de Riemann.

Partie A · III — Un calcul d'intégrale (Q11)

- Q11 — intégrabilité de $t \mapsto t^{2(s-1)}$ sur $]0, 1]$ pour $\operatorname{Re}(s) > 1/2$, puis calcul de $\int_0^1 |t^{s-1}|^2 dt$.

Q11. Posons $x = \operatorname{Re}(s) > 1/2$. D'après Q4 :

$$|t^{s-1}|^2 = (t^{x-1})^2 = t^{2x-2}.$$

L'intégrale $\int_0^1 t^\alpha dt$ converge si et seulement si $\alpha > -1$. Ici $2x - 2 > -1$ équivaut à $x > 1/2$, ce qui est l'hypothèse : la fonction est **intégrable sur $]0, 1]$** .

Le calcul est alors immédiat :

$$\int_0^1 t^{2x-2} dt = [t^{2x-1}/(2x-1)]_0^1 = 1/(2x - 1),$$

le crochet en 0 étant nul puisque $2x - 1 > 0$. D'où

$$\int_0^1 |t^{s-1}|^2 dt = 1/(2 \operatorname{Re}(s) - 1).$$

Cette quantité explose quand $\operatorname{Re}(s) \rightarrow 1/2$: c'est elle qui, en partie D, fabriquera l'inégalité $d_n^2 |s|^2 \geq 2\operatorname{Re}(s) - 1$.

Partie A · IV — Une étude géométrique (Q12 à Q14)

Pour $d \in]0,1[$, Δ_d désigne l'ensemble des points d'affixe s vérifiant $d^2 |s|^2 \geq 2 \operatorname{Re}(s) - 1$.

- **Q12** — Δ_d est le complémentaire d'un disque, dont on précise centre et rayon.

Q12. Écrivons $s = a + ib$. L'inégalité $d^2(a^2 + b^2) \geq 2a - 1$ se réécrit, en divisant par $d^2 > 0$:

$$a^2 + b^2 - (2/d^2) \cdot a + 1/d^2 \geq 0,$$

soit, en complétant le carré :

$$(a - 1/d^2)^2 + b^2 \geq 1/d^4 - 1/d^2.$$

Le membre de droite est strictement positif : $1/d^4 - 1/d^2 = (1 - d^2)/d^4 > 0$ puisque $d \in]0,1[$.

Ainsi Δ_d est le complémentaire du **disque ouvert** D_d de centre 0_d d'affixe $1/d^2$ et de rayon

$$R_d = \sqrt{(1 - d^2)/d^2}.$$

- **Q13** — image de $]0,1[$ par $g(d) = 1/d^2 - \sqrt{(1-d^2)}/d^2$.

Q13. Posons $u = \sqrt{1 - d^2}$. Quand d parcourt $]0,1[$, u parcourt $]0,1[$ — l'application est une bijection décroissante. Avec $d^2 = 1 - u^2$:

$$g(d) = (1 - u)/(1 - u^2) = (1 - u)/((1 - u)(1 + u)) = 1/(1 + u).$$

Quand u parcourt $]0,1[$, $1/(1+u)$ parcourt $]1/2, 1[$. Donc

$$g(]0,1[) =]1/2, 1[.$$

Interprétation : $g(d) = 1/d^2 - R_d$ est l'abscisse du point le plus à gauche du disque D_d . Ce bord gauche balaie exactement la bande $]1/2, 1[$ — il approche la droite $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ sans jamais l'atteindre.

- **Q14** — l'intersection de tous les Δ_d .

Q14. Le complémentaire d'une intersection étant la réunion des complémentaires,

$\cap_d \Delta_d$ est le complémentaire de $\cup_d D_d$.

Soit s tel que $\operatorname{Re}(s) > 1/2$. Alors $2 \operatorname{Re}(s) - 1 > 0$ et l'on peut choisir $d \in]0,1[$ assez petit pour que

$$d^2 < (2 \operatorname{Re}(s) - 1)/|s|^2,$$

ce qui signifie exactement $s \in D_d$. Réciproquement, si $\operatorname{Re}(s) \leq 1/2$, alors $2 \operatorname{Re}(s) - 1 \leq 0 \leq d^2 |s|^2$ pour tout d : le point appartient à tous les Δ_d .

D'où

$$\cap_{d \in]0,1[} \Delta_d = \{s \in \mathbb{C} ; \operatorname{Re}(s) \leq 1/2\}.$$

Le demi-plan critique apparaît ici comme une intersection de complémentaires de disques : c'est la traduction géométrique de ce que la partie D démontrera par l'analyse.

Partie B · I — Transformée de Mellin des fonctions f_k (Q15 à Q21)

Pour $k \geq 2$, $f_k(t) = (1/k)[1/t] - [1/(kt)]$ sur $]0,1]$.

- **Q15** — valeurs de $f_k(1/i)$ pour $1 \leq i \leq k$.

Q15. Prenons $t = 1/i$ avec $1 \leq i \leq k$. Alors $1/t = i$, donc $[1/t] = i$, et $1/(kt) = i/k$.

- si $1 \leq i \leq k-1$, alors $0 < i/k < 1$ donc $[i/k] = 0$ et $f_k(1/i) = i/k$;
- si $i = k$, alors $[i/k] = 1$ et $f_k(1/k) = 1 - 1 = 0$.

- **Q16** — l'encadrement $0 \leq f_k(t) \leq (k-1)/k$.

Q16. Posons $m = [1/(kt)]$, de sorte que $m \leq 1/(kt) < m+1$, c'est-à-dire

$$km \leq 1/t < km + k.$$

La partie entière $[1/t]$ est donc un entier compris entre km et $km + k - 1$. En divisant par k et en retranchant m :

$$0 \leq [1/t]/k - m \leq (k-1)/k, \text{ c'est-à-dire } 0 \leq f_k(t) \leq (k-1)/k.$$

- **Q17** — l'ensemble des valeurs prises par f_k .

Q17. La démonstration précédente montre mieux que l'encadrement : $[1/t] - km$ est un entier de $\{0, 1, \dots, k-1\}$, donc

$$f_k(t) \in \{0, 1/k, 2/k, \dots, (k-1)/k\}.$$

Et **Q15** montre que chacune de ces valeurs est atteinte : i/k en $t = 1/i$ pour $1 \leq i \leq k-1$, et 0 en $t = 1/k$. L'ensemble des valeurs prises est donc exactement

$$\{i/k ; 0 \leq i \leq k-1\}.$$

- **Q18** — continuité par morceaux et intégrabilité.
- **Q19 à Q21** — convergence de l'intégrale associée, calcul de $F(s) = \int_0^1 [1/t] t^{s-1} dt$, puis la transformée de f_k .

Q18. La fonction $t \mapsto [1/t]$ est constante sur chaque intervalle $]1/(m+1), 1/m]$. Sur tout segment $[a, 1] \subset]0,1]$, elle ne présente donc qu'un nombre fini de discontinuités : f_k est continue par morceaux sur $]0,1]$.

Elle est de plus bornée par $(k-1)/k$ (**Q16**), donc intégrable sur l'intervalle borné $]0,1]$.

Q19. Pour $u > 0$, $0 \leq \lfloor u \rfloor \leq u$, donc

$$0 \leq \lfloor 1/(kt) \rfloor \cdot t^{s-1} \leq t^{s-1}/(kt) = t^{s-2}/k.$$

L'intégrale $\int_0^1 t^{s-2} dt$ converge si et seulement si $s - 2 > -1$, c'est-à-dire $s > 1$: c'est l'hypothèse. Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale **converge**.

Q20. Sur $]1/(j+1), 1/j]$, on a $j \leq 1/t < j+1$ donc $\lfloor 1/t \rfloor = j$. En découpant $]0, 1]$ selon cette partition, la positivité de l'intégrande autorise l'échange somme-intégrale :

$$F(s) = \sum_{j \geq 1} j \int_{1/(j+1)}^{1/j} t^{s-1} dt = \sum_{j \geq 1} (j/s) (1/j^s - 1/(j+1)^s).$$

Posons $a_j = j^{-s}$ et sommons par parties (transformation d'Abel) :

$$\sum_{j=1}^N j(a_j - a_{j+1}) = \sum_{j=1}^N a_j - N \cdot a_{N+1}.$$

Comme $s > 1$, $N \cdot (N+1)^{-s} \rightarrow 0$, et $\sum a_j \rightarrow \zeta(s)$. D'où

$$F(s) = \zeta(s)/s.$$

Q21. Par linéarité, $\int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt = (1/k)F(s) - \int_0^1 \lfloor 1/(kt) \rfloor t^{s-1} dt$.

Dans la seconde intégrale, posons $u = kt$:

$$\int_0^1 \lfloor 1/(kt) \rfloor t^{s-1} dt = k^{-s} \int_0^k \lfloor 1/u \rfloor u^{s-1} du.$$

Or $\lfloor 1/u \rfloor = 0$ dès que $u > 1$: l'intégrale se réduit à $\int_0^1$, c'est-à-dire à $F(s)$. Finalement

$$\int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt = (1/k - 1/k^s) \cdot F(s) = (1/s) (1/k - 1/k^s) \cdot \zeta(s).$$

Cette égalité est le pivot du problème : elle relie les fonctions f_k , très élémentaires, à ζ . C'est elle qu'on exploitera en Q38 pour transformer une hypothèse d'annulation de ζ en une contrainte géométrique.

Partie B · II — Prolongement de la fonction ζ (Q22 à Q24)

s désigne ici un réel strictement positif, et $h(t) = 1/t^s$.

- **Q22** — maximum de $|h'|$ sur $[k, k+1]$.

Q22. $h(t) = t^{-s}$ donne $h'(t) = -s \cdot t^{-s-1}$, donc

$$|h'(t)| = s/t^{s+1},$$

fonction **décroissante** de t puisque $s > 0$. Son maximum sur $[k, k+1]$ est donc atteint en $t = k$:

$$\max_{[k, k+1]} |h'| = s/k^{s+1}.$$

- **Q23** — convergence de la série $\sum_{k \geq 1} (1/k^s - 1/t^s) dt$, et l'encadrement $0 \leq G(s) \leq s \cdot \zeta(s+1)$.

Q23. Pour $t \in [k, k+1]$, on a $t^s \geq k^s$ donc $1/k^s - 1/t^s \geq 0$: les termes de la série sont **positifs**.

L'inégalité des accroissements finis appliquée à h entre k et t donne

$$|1/k^s - 1/t^s| \leq (s/k^{s+1}) \cdot (t - k),$$

d'où, en intégrant sur $[k, k+1]$:

$$0 \leq \int_k^{k+1} (1/k^s - 1/t^s) dt \leq (s/k^{s+1}) \cdot \int_k^{k+1} (t-k) dt = s/(2k^{s+1}).$$

La série $\sum s/(2k^{s+1})$ converge — c'est $(s/2) \cdot \zeta(s+1)$, avec $s+1 > 1$. La série étudiée converge donc, et

$$0 \leq G(s) \leq (s/2) \cdot \zeta(s+1) \leq s \cdot \zeta(s+1).$$

- **Q24** — l'égalité $\zeta(s) - G(s) = 1/(s-1)$ pour $s > 1$, puis le comportement de ζ au voisinage de 1.

Q24. Pour $s > 1$, $\int_k^{k+1} (1/k^s) dt = 1/k^s$ et la somme des intégrales $\int_k^{k+1} t^{-s} dt$ télescope en $\int_1^{+\infty} t^{-s} dt = 1/(s-1)$. Donc

$$G(s) = \sum_{k \geq 1} 1/k^s - \int_1^{+\infty} t^{-s} dt = \zeta(s) - 1/(s-1),$$

c'est-à-dire $\zeta(s) - G(s) = 1/(s-1)$.

Quand $s \rightarrow 1^+$, l'encadrement de **Q23** donne $0 \leq G(s) \leq s \cdot \zeta(s+1)$, quantité qui tend vers $\zeta(2)$: elle reste **bornée**. D'où

$$\zeta(s) = 1/(s-1) + O(1).$$

C'est ce qui permet de définir ζ sur la bande critique par la formule $\zeta(s) = 1/(s-1) + G(s)$: le pôle en 1 est isolé dans le premier terme, et G reste sage. La suite du problème travaille sur ce prolongement.

Partie B · III — Intégrale des fonctions f_k (Q25, Q26)

- Q25 — passage à la limite $s \rightarrow 1^+$ dans $\int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt$.

Q25. Soit (s_n) une suite de réels > 1 tendant vers 1 . Posons $\varphi_n(t) = f_k(t) \cdot t^{s_n-1}$.

- chaque φ_n est continue par morceaux sur $]0, 1]$;
- $\varphi_n(t) \rightarrow f_k(t)$ en tout point, puisque $t^{s_n-1} \rightarrow t^0 = 1$;
- **domination** : pour $t \in]0, 1]$ et $s_n \geq 1$, on a $t^{s_n-1} \leq 1$, donc $|\varphi_n(t)| \leq (k-1)/k$ d'après Q16, fonction constante intégrable sur l'intervalle borné $]0, 1]$.

Le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt \rightarrow \int_0^1 f_k(t) dt \text{ quand } s \rightarrow 1^+.$$

- Q26 — l'égalité $\int_0^1 f_k(t) dt = \ln(k)/k$.

Q26. Partons de Q21 et faisons tendre s vers 1^+ .

Développons $1/k^s = (1/k) \cdot e^{-(s-1) \ln k} = (1/k)(1 - (s-1) \ln k + o(s-1))$, d'où

$$1/k - 1/k^s = (\ln k / k) \cdot (s-1) + o(s-1).$$

D'autre part $\zeta(s) = 1/(s-1) + o(1)$ d'après Q24. Le produit vaut donc

$$(1/s) \cdot [(\ln k / k)(s-1) + o(s-1)] \cdot [1/(s-1) + o(1)] \rightarrow (\ln k)/k$$

quand $s \rightarrow 1^+$, le facteur $1/s$ tendant vers 1 et les termes croisés vers 0 .

En rapprochant de Q25, les deux limites coïncident :

$$\int_0^1 f_k(t) dt = \ln(k)/k.$$

Partie C · I — Une forme bilinéaire symétrique positive (Q27 à Q29)

E désigne l'espace des fonctions continues par morceaux sur $]0,1]$, et L^2 le sous-ensemble de celles dont le carré est intégrable.

- **Q27** — trois affirmations à trancher : les fonctions bornées, l'égalité $E = L^2$, et les fonctions intégrables.

Q27. a) Vrai. Si $|f| \leq M$ sur $]0,1]$, alors $f^2 \leq M^2$, fonction constante intégrable sur un intervalle borné. Donc $f \in L^2$.

b) Faux. La fonction $f(t) = 1/t$ est continue sur $]0,1]$, donc appartient à E , mais $f^2(t) = 1/t^2$ n'est pas intégrable en 0 (exposant $-2 \leq -1$). Donc $f \notin L^2$ et $E \neq L^2$.

c) Faux. La fonction $f(t) = 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0,1]$ — l'exposant $-1/2$ est > -1 , et $\int_0^1 t^{-1/2} dt = 2$. Mais $f^2(t) = 1/t$ n'est pas intégrable : $f \notin L^2$.

Les inclusions vont donc dans un seul sens, et aucune des deux réciproques n'est vraie : sur un intervalle borné, être de carré intégrable est plus fort qu'être intégrable, mais plus faible qu'être borné.

- **Q28** — convergence absolue de $\int fg$ et structure de sous-espace vectoriel.

Q28. De $(|f| - |g|)^2 \geq 0$ on tire $2|f||g| \leq f^2 + g^2$, donc

$$|f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2}(f(t)^2 + g(t)^2).$$

Le membre de droite est intégrable comme somme de deux fonctions intégrables : par comparaison, $\int_0^1 fg$ converge absolument.

Pour la structure : $0 \in L^2$, et pour $f, g \in L^2$ et λ réel,

$$(f + \lambda g)^2 = f^2 + 2\lambda fg + \lambda^2 g^2$$

est intégrable, le terme croisé l'étant par ce qui précède. Donc $f + \lambda g \in L^2$: L^2 est un **sous-espace vectoriel** de E .

- **Q29** — $(f|g) = \int_0^1 fg$ est une forme bilinéaire symétrique positive, mais pas un produit scalaire sur L^2 .

Q29. La bilinéarité découle de la linéarité de l'intégrale, la symétrie du fait que $fg = gf$, et la positivité de $(f|f) = \int_0^1 f^2 \geq 0$.

En revanche la forme **n'est pas définie**. Prenons la fonction f nulle sur $]0,1]$ sauf en $t = 1/2$ où elle vaut 1 . Elle est continue par morceaux, elle appartient à L^2 , elle n'est pas la fonction nulle, et pourtant

$$(f|f) = \int_0^1 f^2 = 0,$$

puisque modifier une fonction en un point ne change pas son intégrale. Ce n'est donc **pas un produit scalaire** sur L^2 .

Partie C · II — Un espace préhilbertien réel (Q30 à Q33)

On suppose $\sum_{k=2}^n \lambda_k f_k = 0$ sur $]0, 1]$.

- **Q30** — en évaluant sur $]1/2, 1]$, obtenir $\sum \lambda_k/k = 0$.

Q30. Soit $t \in]1/2, 1]$. Alors $1 \leq 1/t < 2$, donc $[1/t] = 1$.

Pour $k \geq 2$, $1/(kt) \leq 1/k \leq 1/2 < 1$ et $1/(kt) > 0$, donc $[1/(kt)] = 0$.

Ainsi $f_k(t) = 1/k$ sur tout $]1/2, 1]$, et la relation donne

$$\sum_{k=2}^n \lambda_k/k = 0.$$

- **Q31** — en évaluant en un point bien choisi, une relation pour chaque ℓ .

Q31. Évaluons en $t = 1/\ell$, pour ℓ entier compris entre 2 et $n-1$. Alors $[1/t] = \ell$ et $1/(kt) = \ell/k$, donc

$$f_k(1/\ell) = \ell/k - [\ell/k].$$

Trois cas :

- si $k > \ell$: $0 < \ell/k < 1$ donc $[\ell/k] = 0$ et $f_k(1/\ell) = \ell/k$;
- si $k = \ell$: $f_\ell(1/\ell) = 1 - 1 = 0$;
- si $k < \ell$: $f_k(1/\ell) = \ell/k - [\ell/k]$.

En reportant dans la relation, le terme $k = \ell$ disparaissant :

$$\sum_{k=\ell+1}^n \lambda_k \cdot (\ell/k) + \sum_{k=2}^{\ell-1} \lambda_k (\ell/k - [\ell/k]) = 0.$$

- **Q32** — en déduire $\lambda_2 = 0$, puis la nullité de tous les λ_k : quelle propriété de la famille (f_k) vient-on d'établir ?

Q32. Pour $\ell = 2$, la seconde somme est vide, donc nulle, et la relation devient $2 \cdot \sum_{k=3}^n \lambda_k/k = 0$, soit

$$\sum_{k=3}^n \lambda_k/k = 0.$$

En retranchant cette égalité de celle de **Q30**, il reste $\lambda_2/2 = 0$, donc $\lambda_2 = 0$.

Montrons par récurrence sur ℓ que $\lambda_2 = \dots = \lambda_\ell = 0$. Notons $T_\ell = \sum_{k=\ell+1}^n \lambda_k/k$.

Supposons $\lambda_2 = \dots = \lambda_{\ell-1} = 0$. La seconde somme de **Q31** au rang ℓ est alors nulle, d'où $\ell \cdot T_\ell = 0$ et $T_\ell = 0$. Or l'hypothèse au rang précédent donne $T_{\ell-1} = 0$, et

$$T_{\ell-1} = \lambda_\ell/\ell + T_\ell,$$

donc $\lambda_\ell = 0$. La récurrence conclut : tous les λ_k sont nuls.

La propriété établie est que la famille $(f_k)_{k \geq 2}$ est libre.

- **Q33** — $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur $F = \text{Vect}(1, f_2, f_3, \dots)$.

Q33. Bilinéarité, symétrie et positivité sont acquises (**Q29**) ; il reste le caractère **défini**, qui échouait sur L^2 .

Toute fonction f de F s'écrit $f = \alpha \cdot 1 + \sum \lambda_k f_k$. Or $[1/t]$ est constante sur chaque intervalle $]1/(m+1), 1/m]$: **f y est donc constante**, de valeur c_m .

Si $(f|f) = 0$, alors $\int_0^1 f^2 = 0$, et cette intégrale est la somme des $c_m^2 \cdot (1/m - 1/(m+1))$, tous positifs. Chacun est donc nul, et comme $1/m - 1/(m+1) > 0$, on obtient $c_m = 0$ pour tout m : **f est la fonction nulle** sur $]0,1]$.

Le contre-exemple de **Q29** ne subsiste donc pas dans F : les fonctions y sont constantes par morceaux, et ne peuvent être non nulles en un point isolé. $(\cdot | \cdot)$ est un **produit scalaire sur F** .

Partie C · III — Distance d'un vecteur à des sous-espaces (Q34 à Q36)

On travaille dans F muni du produit scalaire précédent, et d_n désigne la distance de la fonction constante 1 au sous-espace engendré par $f_2, \dots, f_n$.

- **Q34** — existence et unicité d'une famille orthonormale (e_k) adaptée aux sous-espaces emboîtés, avec une condition de signe.

Q34. La famille $(f_2, \dots, f_n)$ est libre d'après Q32, et F est préhilbertien d'après Q33 : le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt s'applique.

Il produit une famille orthonormale $(e_k)_{2 \leq k \leq n}$ telle que, pour chaque p ,

$$\text{Vect}(e_2, \dots, e_p) = \text{Vect}(f_2, \dots, f_p),$$

et la condition $(e_p | f_p) > 0$ fixe le signe de chaque e_p , ce qui assure l'unicité — c'est l'énoncé classique du théorème, la seule liberté restante étant précisément ce choix de signe.

- **Q35** — l'égalité $d_n^2 = 1 - \sum_{k=2}^n (1 | e_k)^2$.

Q35. Notons $G_n = \text{Vect}(f_2, \dots, f_n) = \text{Vect}(e_2, \dots, e_n)$.

La base (e_k) étant orthonormale, le projeté orthogonal de 1 sur G_n est

$$p = \sum_{k=2}^n (1 | e_k) \cdot e_k,$$

et le théorème de Pythagore, $1 = p + (1 - p)$ avec $1 - p \perp G_n$, donne

$$d_n^2 = \|1 - p\|^2 = \|1\|^2 - \|p\|^2 = \|1\|^2 - \sum_{k=2}^n (1 | e_k)^2.$$

Enfin $\|1\|^2 = \int_0^1 1 \, dt = 1$, d'où

$$d_n^2 = 1 - \sum_{k=2}^n (1 | e_k)^2.$$

- **Q36** — convergence de la suite (d_n) .

Q36. Les sous-espaces sont emboîtés : $G_n \subset G_{n+1}$, donc la distance à G_{n+1} est inférieure à la distance à G_n :

$$0 \leq d_{n+1} \leq d_n.$$

La suite (d_n) est décroissante et minorée par 0 : elle converge.

On le lit aussi sur Q35 : d_n^2 décroît puisqu'on lui retranche à chaque rang le terme positif $(1 | e_{n+1})^2$. La question de savoir si la limite est nulle — c'est-à-dire si 1 est dans l'adhérence de l'espace engendré par les f_k — est précisément le critère de Nyman-Beurling, équivalent à l'hypothèse de Riemann.

Partie D — Synthèse (Q37, Q38)

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est admise pour les fonctions continues par morceaux de carré intégrable, à valeurs complexes.

- **Q37** — justifier son application à $1 - \sum \lambda_k f_k$ et à t^{s-1} .

Q37. Il suffit de vérifier que les deux fonctions remplissent les conditions d'application.

$f = 1 - \sum_{k=2}^n \lambda_k f_k$ est continue par morceaux (**Q18**) et **bornée**, comme combinaison linéaire finie de fonctions bornées par 1 (**Q16**) : son carré est intégrable sur $]0, 1]$ d'après **Q27.a**).

$g(t) = t^{s-1}$ est continue sur $]0, 1]$, et $|g|^2 = t^{2\operatorname{Re}(s)-2}$ est intégrable puisque $\operatorname{Re}(s) > 1/2$ (**Q11**).

L'inégalité admise s'écrit alors exactement comme dans l'énoncé, le second facteur du membre de droite valant $1/(2\operatorname{Re}(s) - 1)$ d'après **Q11**.

- **Q38** — établir $d_n^2 |s|^2 \geq 2\operatorname{Re}(s) - 1$, puis conclure lorsque $d_n \rightarrow 0$.

Q38. Supposons $\zeta(s) = 0$ pour un $s \neq 1$ de partie réelle $> 1/2$.

D'après **Q21**, admise pour s complexe, on a pour tout $k \geq 2$:

$$\int_0^1 f_k(t) t^{s-1} dt = (1/s)(1/k - 1/k^s) \cdot \zeta(s) = 0.$$

Par linéarité, $\int_0^1 (\sum \lambda_k f_k) t^{s-1} dt = 0$ quels que soient les λ_k . Comme par ailleurs $\int_0^1 t^{s-1} dt = 1/s$, il reste

$$\int_0^1 (1 - \sum \lambda_k f_k) t^{s-1} dt = 1/s.$$

L'inégalité de **Q37** donne alors

$$1/|s|^2 \leq \|1 - \sum \lambda_k f_k\|^2 \times 1/(2\operatorname{Re}(s) - 1).$$

Cette inégalité vaut pour **tout** choix des λ_k . En prenant celui qui réalise la distance — le projeté orthogonal de 1 sur G_n —, le premier facteur devient d_n^2 , d'où

$$2\operatorname{Re}(s) - 1 \leq d_n^2 \cdot |s|^2.$$

Supposons enfin $d_n \rightarrow 0$. En passant à la limite dans cette inégalité, à s fixé :

$$2\operatorname{Re}(s) - 1 \leq 0, \text{ soit } \operatorname{Re}(s) \leq 1/2,$$

ce qui contredit $\operatorname{Re}(s) > 1/2$. L'hypothèse $\zeta(s) = 0$ est donc absurde :

si $d_n \rightarrow 0$, alors ζ ne s'annule en aucun point du demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 1/2$.

On retrouve la lecture géométrique de la partie A : l'inégalité $d_n^2 |s|^2 \geq 2\operatorname{Re}(s) - 1$ dit exactement que s appartient à $\Delta_{\{d_n\}}$, et **Q14** identifiait l'intersection de ces ensembles au demi-plan $\operatorname{Re}(s) \leq 1/2$. La condition $d_n \rightarrow 0$ — l'approximation de la fonction constante 1 par les f_k — est le critère de Nyman-Beurling, équivalent à l'hypothèse de Riemann. Le sujet n'en démontre qu'un sens, et c'est déjà beaucoup.