



PULSARS

CORRECTION INDÉPENDANTE

Centrale-Supélec 2026 — Mathématiques 1 (PSI)

SESSION 2026	NIVEAU CPGE	DURÉE —	FILIÈRES PSI
------------------------	-----------------------	-------------------	------------------------

Correction indépendante rédigée par Pulsars. Elle n'est ni officielle ni affiliée à l'organisateur du concours. Les énoncés ne sont pas reproduits : le sujet officiel reste consultable sur le site du concours.

Partie A · I — Le cas $n = 1$ (Q1 à Q3)

- Q1 — la loi de X_1 .

Q1. X_1 est le rang du premier pile. L'événement $(X_1 = k)$ s'écrit « les $k - 1$ premiers lancers donnent face, le k -ième donne pile », et les lancers sont indépendants :

$$P(X_1 = k) = q^{k-1} \cdot p \text{ pour } k \geq 1.$$

C'est la loi géométrique de paramètre p .

- Q2 — sa fonction génératrice, son espérance et sa variance, données directement.

Q2. Les résultats classiques sont

$$G_{X_1}(z) = pz/(1 - qz) \text{ pour } |z| < 1/q, E(X_1) = 1/p, V(X_1) = q/p^2.$$

- Q3 — la démonstration de ces résultats.

Q3. Pour la fonction génératrice, on reconnaît une série géométrique :

$$G_{X_1}(z) = \sum_{k \geq 1} q^{k-1} p \cdot z^k = pz \cdot \sum_{k \geq 1} (qz)^{k-1} = pz/(1 - qz),$$

convergente dès que $|qz| < 1$, c'est-à-dire $|z| < 1/q$. Le rayon de convergence $1/q$ étant > 1 , G est de classe C^∞ au voisinage de 1 et tous les moments existent.

$$G'(z) = p/(1 - qz)^2, \text{ donc } E(X_1) = G'(1) = p/(1 - q)^2 = p/p^2 = 1/p.$$

$$G''(z) = 2pq/(1 - qz)^3, \text{ donc } G''(1) = 2pq/p^3 = 2q/p^2. \text{ La formule } V = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 \text{ donne}$$

$$V(X_1) = 2q/p^2 + 1/p - 1/p^2 = (2q + p - 1)/p^2 = q/p^2,$$

puisque $p - 1 = -q$.

Partie A · II — Le cas $n = 2$ (Q4 à Q13)

- **Q4, Q5** — les premières valeurs, et les résultats possibles des deux premiers lancers lorsque $X_2 = k$ avec $k > 2$.
- **Q6** — la relation de récurrence d'ordre 2.

Q6. Ces deux cas forment un système complet d'événements, et la pièce n'a pas de mémoire : après un début « raté », tout recommence à l'identique.

- premier lancer face, de probabilité q : il reste à obtenir deux piles à partir du deuxième lancer, ce qui prend $k - 1$ lancers ;
- début (P, F) , de probabilité pq : il reste $k - 2$ lancers.

La formule des probabilités totales donne

$$P(X_2 = k) = q \cdot P(X_2 = k-1) + pq \cdot P(X_2 = k-2).$$

- **Q7** — les racines r_1 et r_2 du trinôme associé.
- **Q8, Q9** — rayon de convergence, puis expression de $P(X_2 = k)$.

Q7. Le discriminant de $X^2 - qX - pq$ vaut $\Delta = q^2 + 4pq > 0$: deux racines réelles distinctes. Leur produit vaut $-pq < 0$, donc elles sont de signes contraires : $r_2 < 0 < r_1$.

Évaluons le trinôme aux bornes :

$$P(1) = 1 - q - pq = p - pq = p(1 - q) = p^2 > 0, \text{ et } P(0) = -pq < 0,$$

donc $r_1 \in]0, 1[$. De même $P(-1) = 1 + q - pq = 1 + q(1 - p) = 1 + q^2 > 0$, donc $r_2 \in]-1, 0[$.

Enfin $r_1 + r_2 = q > 0$ avec $r_2 < 0$, donc $r_1 > -r_2 = |r_2|$: on a bien $|r_2| < |r_1|$.

- **Q10** — la probabilité de ne jamais obtenir deux piles consécutifs est nulle.
- **Q11 à Q13** — fonction génératrice, existence des moments, espérance et variance.

Q10. Les événements $(X_2 \geq k)$ forment une suite **décroissante** dont l'intersection est $(X_2 = +\infty)$. Par continuité décroissante,

$$P(X_2 = +\infty) = \lim_k P(X_2 \geq k).$$

Or $P(X_2 \geq k) = \sum_{j \geq k} P(X_2 = j)$ est le reste d'une série convergente — les termes sont dominés par une suite géométrique de raison $r_1 < 1$ — donc il tend vers 0. Ainsi

$$P(X_2 = +\infty) = 0 : \text{on obtient presque sûrement deux piles consécutifs.}$$

Q4. Deux piles consécutifs demandent au moins deux lancers, donc $P(X_2 = 1) = 0$.

$(X_2 = 2)$ signifie que les deux premiers lancers donnent pile : $P(X_2 = 2) = p^2$.

Q5. Soit $k > 2$. Si les deux premiers lancers donnaient (P, P) , on aurait $X_2 = 2 \neq k$. Les cas restants sont donc :

- le premier lancer donne **face** — le second est quelconque ;
- le premier donne **pile** et le second **face**.

Q8. Comme $|r_2| < r_1$, le terme r_1^{k-1} domine : le coefficient $r_1^{k-1} - r_2^{k-1}$ est équivalent à r_1^{k-1} . Le rayon de convergence est celui de la série géométrique associée :

$R = 1/r_1$, et $R > 1$ puisque $r_1 < 1$.

Q9. La suite $(P(X_2 = k))$ vérifie pour $k > 2$ une récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $X^2 - qX - pq = 0$, à racines distinctes :

$$P(X_2 = k) = A \cdot r_1^k + B \cdot r_2^k.$$

Les conditions $P(X_2 = 1) = 0$ et $P(X_2 = 2) = p^2$ donnent le système

$$A r_1 + B r_2 = 0 \text{ et } A r_1^2 + B r_2^2 = p^2.$$

De la première, $B = -A r_1/r_2$; en reportant, $A r_1(r_1 - r_2) = p^2$. D'où

$$P(X_2 = k) = p^2 \cdot (r_1^{k-1} - r_2^{k-1}) / (r_1 - r_2), \text{ avec } r_1 - r_2 = \sqrt{(q^2 + 4pq)}.$$

La formule redonne bien p^2 pour $k = 2$.

Q11. Multiplions la récurrence par z^k et sommons pour $k \geq 3$. En notant $G = G_{\{X_2\}}$ et en utilisant $P(X_2 = 1) = 0$:

$$G - p^2 z^2 = qz \cdot G + pqz^2 \cdot G,$$

les décalages d'indice se traduisant par des facteurs z et z^2 . D'où

$$G(1 - qz - pqz^2) = p^2 z^2, \text{ soit } G_{\{X_2\}}(z) = p^2 z^2 / (1 - qz - pqz^2).$$

Q12. Le rayon de convergence de G vaut $R = 1/r_1 > 1$ (Q8). La somme d'une série entière étant de classe C^∞ sur son disque ouvert de convergence, G l'est au voisinage de 1 : X_2 admet des moments de tout ordre, en particulier une espérance et une variance.

Q13. Posons $D(z) = 1 - qz - pqz^2$, de sorte que $G = p^2 z^2 / D$. On calcule

$$D(1) = p^2, D'(1) = -q(1 + 2p), D''(1) = -2pq.$$

La dérivation d'un quotient donne $G'(1) = [2p^2 \cdot D(1) - p^2 \cdot D'(1)] / D(1)^2$, soit

$$E(X_2) = 2 + q(1 + 2p) / p^2 = 1/p + 1/p^2$$

après simplification avec $q = 1 - p$.

Ce résultat s'interprète bien : il faut en moyenne $1/p$ lancers pour un premier pile, et le second pile coûte $1/p^2$ — les échecs obligent à tout recommencer.

En dérivant une fois de plus,

$$G''(1) = p^2 \cdot [2/D - 4D'/D^2 + 2(D')^2/D^3 - D''/D^2] \text{ évalué en } 1,$$

puis $V(X_2) = G''(1) + E(X_2) - E(X_2)^2$ donne, après simplification,

$$V(X_2) = 1/p^4 + 2/p^3 - 2/p^2 - 1/p.$$

Vérification pour $p = 1/2$: $E = 6$ et $V = 16 + 16 - 8 - 2 = 22$, valeurs classiques pour une pièce équilibrée.

Partie B · I — Le cas $n = 3$ par l'algèbre linéaire (Q14 à Q25)

- Q14, Q15 — premières valeurs et récurrence d'ordre 3.
- Q16, Q17 — la matrice compagnon M et son polynôme caractéristique.
- Q18, Q19 — χ_M a une unique racine dans $]0,1[$, et une seule racine réelle.
- Q20 à Q23 — diagonalisation dans $\mathbb{C}$, forme générale de $P(X_3 = k)$, et son écriture réelle.
- Q24, Q25 — comparaison des modules des racines, puis l'équivalent.

Q14. $P(X_3 = 1) = P(X_3 = 2) = 0$ — trois piles demandent trois lancers — et $P(X_3 = 3) = p^3$.

Q15. Pour $k > 3$, on classe selon le rang du **premier face**, qui survient nécessairement dans les trois premiers lancers (sinon $X_3 = 3$) :

- face au premier lancer, de probabilité q : il reste $k - 1$ lancers ;
- début (P, F) , de probabilité pq : il reste $k - 2$ lancers ;
- début (P, P, F) , de probabilité p^2q : il reste $k - 3$ lancers.

Ces trois cas, joints à (P, P, P) , forment un système complet d'événements, d'où

$$P(X_3 = k) = q \cdot P(X_3 = k-1) + pq \cdot P(X_3 = k-2) + p^2q \cdot P(X_3 = k-3).$$

Q16. La première coordonnée de U_{k+1} est $P(X_3 = k+3)$, que la récurrence exprime à l'aide des trois coordonnées de U_k ; les deux autres sont un simple décalage. D'où la **matrice compagnon**

$$M = \begin{bmatrix} q & pq & p^2q \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Q17. En développant $\det(XI_3 - M)$ selon la dernière colonne, ou en reconnaissant une matrice compagnon :

$$\chi_M(X) = X^3 - qX^2 - pqX - p^2q.$$

Q18. $\chi_M(0) = -p^2q < 0$, et

$$\chi_M(1) = 1 - q(1 + p + p^2) = 1 - (1 - p)(1 + p + p^2) = 1 - (1 - p^3) = p^3 > 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, χ_M s'annule dans $]0, 1[$.

Pour l'unicité, écrivons pour $X > 0$:

$$\chi_M(X)/X^3 = 1 - q/X - pq/X^2 - p^2q/X^3.$$

Chaque terme soustrait est **strictement décroissant en valeur absolue** quand X croît, donc cette fonction est strictement croissante sur $]0, +\infty[$: elle s'annule au plus une fois. χ_M a donc **une unique racine positive**, et elle est dans $]0, 1[$: notons-la λ_1 .

Q19. Développons :

$$(X - p) \cdot \chi_M(X) = X^4 - (q + p)X^3 + p^3q = X^4 - X^3 + qp^3,$$

les termes en X^2 et X se compensant exactement, et $p + q = 1$.

Notons $\psi(X) = X^4 - X^3 + qp^3$. Alors $\psi'(X) = X^2(4X - 3)$ est négative sur $]-\infty, 3/4]$ et positive au-delà : ψ est décroissante puis croissante, donc s'annule **au plus deux fois**.

Or p est racine de ψ , et λ_1 aussi. Comme χ_M est de degré 3 — donc admet au moins une racine réelle — et que ses racines réelles sont racines de ψ , il n'y en a **qu'une seule** : λ_1 .

Q20. χ_M a donc une racine réelle λ_1 et deux racines complexes **conjuguées non réelles** λ_2 et $\bar{\lambda}_2$. Ces trois nombres sont deux à deux distincts, et M est d'ordre 3 : elle admet trois valeurs propres distinctes, donc **M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$** .

Q21. De $U_{k+1} = MU_k$ on tire $U_k = M^{k-1}U_1$, puis avec $M = QDQ^{-1}$:

$$U_k = Q \cdot D^{k-1} \cdot Q^{-1} U_1.$$

Les coefficients de D^{k-1} sont λ_1^{k-1} , λ_2^{k-1} et $\bar{\lambda}_2^{k-1}$: chaque coordonnée de U_k — en particulier la troisième, qui vaut $P(X_3 = k)$ — est une combinaison linéaire à coefficients complexes de ces trois quantités, et ces coefficients ne dépendent pas de k . D'où l'existence de (A, B, C) .

Q22. Les constantes se déterminent par les trois premières valeurs. Le système

$$A + B + C = 0, A\lambda_1 + B\lambda_2 + C\bar{\lambda}_2 = 0, A\lambda_1^2 + B\lambda_2^2 + C\bar{\lambda}_2^2 = p^3$$

est un système de **Vandermonde**, inversible puisque les λ_i sont distincts. Les formules de Cramer donnent

$$A = p^3 / ((\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \bar{\lambda}_2)) = p^3 / |\lambda_1 - \lambda_2|^2,$$

λ_1 étant réel : le produit de deux conjugués est un module au carré. En particulier **A est un réel strictement positif**.

Q23. La suite $(P(X_3 = k))$ est réelle, et λ_2 , $\bar{\lambda}_2$ sont conjuguées : les coefficients B et C le sont aussi. Donc

$$B\lambda_2^{k-1} + C\bar{\lambda}_2^{k-1} = 2 \cdot \text{Re}(B\lambda_2^{k-1}).$$

En écrivant $\lambda_2 = r \cdot e^{i\theta}$ et $B = |B|e^{i\beta}$, cette quantité vaut $2|B|r^{k-1}\cos((k-1)\theta + \beta)$, que l'on développe :

$$P(X_3 = k) = a \cdot \lambda_1^{k-1} + b \cdot r^{k-1} \cos((k-1)\theta) + c \cdot r^{k-1} \sin((k-1)\theta),$$

avec $a = A$, $b = 2\operatorname{Re}(B)$ et $c = -2\operatorname{Im}(B)$, tous réels.

Q24. Première inégalité. $\chi_M(q) = q^3 - q^3 - pq^2 - p^2q = -pq(q + p) = -pq < 0$. Comme χ_M ne s'annule qu'une fois sur $]0, +\infty[$ et y tend vers $+\infty$, on en déduit $q < \lambda_1$.

Deuxième. La somme des racines vaut le coefficient q :

$$\lambda_1 + 2\operatorname{Re}(\lambda_2) = q, \text{ donc } 2\operatorname{Re}(\lambda_2) = q - \lambda_1 < 0 : \operatorname{Re}(\lambda_2) < 0.$$

Troisième. $|\lambda_2 - 1|^2 = |\lambda_2|^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda_2) + 1 > 1$ puisque $|\lambda_2|^2 > 0$ et $-2\operatorname{Re}(\lambda_2) > 0$. Donc $|\lambda_2 - 1| > 1$.

Quatrième. Le produit des racines vaut p^2q , donc $\lambda_1 \cdot |\lambda_2|^2 = p^2q$. Par ailleurs, λ_1 étant racine :

$$\lambda_1^3 = q(\lambda_1^2 + p\lambda_1 + p^2) > q \cdot p^2,$$

les autres termes étant positifs. En combinant, $|\lambda_2|^2 = qp^2/\lambda_1 < \lambda_1^3/\lambda_1 = \lambda_1^2$, d'où $|\lambda_2| < \lambda_1$.

Q25. D'après **Q23**, $P(X_3 = k) = A\lambda_1^{k-1} + 2\operatorname{Re}(B\lambda_2^{k-1})$, et le second terme est majoré en module par $2|B| \cdot |\lambda_2|^{k-1}$.

Comme $|\lambda_2| < \lambda_1$, le rapport $(|\lambda_2|/\lambda_1)^{k-1}$ tend vers 0 : le second terme est **négligeable** devant le premier. Donc

$$P(X_3 = k) \sim A \cdot \lambda_1^{k-1} = m \cdot \lambda_1^k \text{ avec } m = A/\lambda_1 = p^3/(\lambda_1 \cdot |\lambda_1 - \lambda_2|^2) > 0.$$

Partie B · II — Un cas particulier : $p = 3/4$ (Q26 à Q28)

- **Q26** — une racine entière de $\chi_M(X/4)$.

Q26. Avec $p = 3/4$ et $q = 1/4$:

$$\chi_M(X) = X^3 - X^2/4 - 3X/16 - 9/256.$$

En substituant $X/4$ et en réduisant au même dénominateur :

$$\chi_M(X/4) = (1/64) \cdot (X^3 - X^2 - 3X - 9).$$

Cherchons une racine entière : elle divise 9. Pour $X = 3$:

$$27 - 9 - 9 - 9 = 0.$$

Donc **3 est racine** de $\chi_M(X/4)$.

- **Q27** — toutes les racines de χ_M .

Q27. La division euclidienne donne

$$X^3 - X^2 - 3X - 9 = (X - 3)(X^2 + 2X + 3).$$

Le second facteur a pour discriminant $4 - 12 = -8 < 0$, de racines $-1 \pm i\sqrt{2}$.

Les racines de $\chi_M(X/4)$ sont donc 3 et $-1 \pm i\sqrt{2}$, et celles de χ_M s'obtiennent en divisant par 4 :

$$\lambda_1 = 3/4, \lambda_2 = (-1 + i\sqrt{2})/4, \bar{\lambda}_2 = (-1 - i\sqrt{2})/4.$$

On vérifie $|\lambda_2| = \sqrt{3}/4 < 3/4 = \lambda_1$, conformément à **Q24**, ainsi que $\lambda_1 |\lambda_2|^2 = (3/4)(3/16) = 9/64 = p^2 q$.

- **Q28** — un équivalent explicite de $P(X_3 = k)$.

Q28. Reprenons $m = A/\lambda_1$ avec $A = p^3/|\lambda_1 - \lambda_2|^2$.

$$\lambda_1 - \lambda_2 = (3 + 1 - i\sqrt{2})/4 = (4 - i\sqrt{2})/4, \text{ donc } |\lambda_1 - \lambda_2|^2 = (16 + 2)/16 = 9/8.$$

Avec $p^3 = 27/64$:

$$A = (27/64) \cdot (8/9) = 3/8, \text{ puis } m = A/\lambda_1 = (3/8) \cdot (4/3) = 1/2.$$

D'où l'équivalent

$$P(X_3 = k) \sim \frac{1}{2} \cdot (3/4)^k.$$

Avec une pièce très favorable au pile, la probabilité d'attendre exactement k lancers décroît donc géométriquement, de raison $3/4$ — soit exactement p . C'est une coïncidence propre à cette valeur : en général $\lambda_1 \neq p$.

Partie C — Le cas général par la fonction génératrice (Q29 à Q35)

$f(t) = t^n - q \cdot \sum_{i=1}^n p^{i-1} t^{n-i}$ est la fonction introduite par le sujet.

- **Q29, Q30** — premières valeurs et récurrence d'ordre n .
- **Q31** — $f(1)$, et l'existence d'un $t \in]p, 1]$ tel que $f(t) \geq 0$.

Q31. La somme géométrique donne

$$f(1) = 1 - q \cdot \sum_{i=1}^n p^{i-1} = 1 - q \cdot (1 - p^n) / (1 - p) = 1 - (1 - p^n) = p^n,$$

puisque $1 - p = q$. Donc $f(1) = p^n > 0$.

En particulier $t = 1$ convient : $f(1) \geq 0$ et $1 \in]p, 1]$.

Par continuité de f , il existe même des t strictement inférieurs à 1 tels que $f(t) > 0$: c'est ce qui donnera une majoration géométrique *stricte* en Q32, et un rayon de convergence > 1 en Q34.

- **Q32** — la majoration $P(X_n = k) \leq t^k$.
- **Q33, Q34** — la fonction génératrice de X_n , et son espérance.

Q32. Récurrence forte sur k .

Initialisation. Pour $k < n$, $P(X_n = k) = 0 \leq t^k$. Pour $k = n$, $P(X_n = n) = p^n \leq t^n$ puisque $t > p > 0$.

Hérédité. Soit $k > n$, et supposons la majoration acquise jusqu'au rang $k - 1$. Alors

$$P(X_n = k) = \sum_{i=1}^n p^{i-1} q \cdot P(X_n = k-i) \leq q \cdot \sum_{i=1}^n p^{i-1} t^{k-i}.$$

En factorisant t^{k-n} :

$$P(X_n = k) \leq t^{k-n} \cdot q \cdot \sum_{i=1}^n p^{i-1} t^{n-i} \leq t^{k-n} \cdot t^n = t^k,$$

la dernière inégalité étant exactement $f(t) \geq 0$.

- **Q35** — la décomposition en éléments simples et son exploitation.

Q35. Pour $|z| < |\lambda_i|$, on développe chaque terme en série géométrique :

$$a_i / (z - \lambda_i) = -(a_i / \lambda_i) \cdot 1 / (1 - z / \lambda_i) = -a_i \cdot \sum_{k \geq 0} z^k / \lambda_i^{k+1}.$$

Les λ_i étant de module > 1 et $|z| < 1/t$, ces développements sont valables simultanément au voisinage de 0. Par unicité des coefficients d'une série entière, le coefficient de z^k pour $k \geq 1$ donne

$$P(X_n = k) = -\sum_{i=1}^n a_i / \lambda_i^{k+1}.$$

Le terme constant a ne contribue qu'au coefficient d'indice 0, lequel est nul puisque $P(X_n = 0) = 0$. Comme tous les $|\lambda_i| > 1$, chaque terme décroît géométriquement : on retrouve, en toute généralité, le comportement observé pour $n = 3$.

Q29. Pour $k < n$, l'événement est impossible : $P(X_n = k) = 0$. Pour $k = n$, il faut que les n premiers lancers donnent pile : $P(X_n = n) = p^n$.

Q30. Même décomposition qu'en **Q15**, selon le rang i du premier face, lequel survient dans les n premiers lancers dès que $X_n > n$:

$$P(X_n = k) = \sum_{i=1}^n p^{i-1} q \cdot P(X_n = k - i),$$

soit $qP(X_n = k-1) + pqP(X_n = k-2) + \dots + p^{n-1}qP(X_n = k-n)$.

Q33. La majoration précédente donne $|P(X_n = k)z^k| \leq (t|z|)^k$, terme général d'une série géométrique convergente dès que $|z| < 1/t$: la série entière définissant $G_{\{X_n\}}$ **converge** sur ce disque.

Pour l'expression, multiplions la récurrence de **Q30** par z^k et sommons pour $k > n$. Le décalage d'indice $k \mapsto k - i$ fait apparaître un facteur z^i , et comme $P(X_n = j) = 0$ pour $j < n$, chaque somme décalée redonne G en entier :

$$G - p^n z^n = G \cdot q \cdot \sum_{i=1}^n p^{i-1} z^i = G \cdot qz \cdot (1 - (pz)^n) / (1 - pz).$$

En multipliant par $1 - pz$ et en regroupant :

$$G \cdot [(1 - pz) - qz(1 - (pz)^n)] = p^n z^n (1 - pz).$$

Le crochet vaut $1 - z(p + q) + qp^n z^{n+1} = 1 - z + qp^n z^{n+1}$, d'où

$$G_{\{X_n\}}(z) = p^n z^n (1 - pz) / (qp^n z^{n+1} - z + 1).$$

Q34. Comme $f(1) = p^n > 0$ et que f est continue, il existe $t < 1$ avec $f(t) > 0$: le rayon de convergence est $\geq 1/t > 1$. La fonction G est donc de classe C^∞ au voisinage de 1 , et X_n **admet une espérance**.

Posons $N(z) = p^n z^n (1 - pz)$ et $D(z) = 1 - z + qp^n z^{n+1}$. On calcule

$$N(1) = p^n q, N'(1) = p^n(nq - p), D(1) = qp^n, D'(1) = -1 + (n+1)qp^n.$$

La dérivée d'un quotient donne alors, après simplification par $p^n q$:

$$E(X_n) = G'(1) = (1 - p^n) / (q p^n).$$

On vérifie $n = 1$: $(1-p)/(qp) = 1/p$, et $n = 2$: $(1-p^2)/(qp^2) = 1/p + 1/p^2$, conformément à **Q13**. En développant, $E(X_n) = 1/p + 1/p^2 + \dots + 1/p^n$: chaque pile supplémentaire coûte une puissance de plus.

Partie D · I — Au moins n piles en k lancers (Q36 à Q40)

$A_{\{n,k\}}$ est l'événement « avoir obtenu une succession d'au moins n piles au cours des k premiers lancers ».

- **Q36, Q37** — premières valeurs et récurrence.
- **Q38** — une fonction Python renvoyant la liste des $P(A_{\{n,l\}})$.
- **Q39, Q40** — la solution constante, puis le passage à la suite $u_k = 1 - P(A_{\{n,k\}})$.

Q38.

```
def probas(p, k, n):  
    q = 1 - p  
    P = [] # P[l-1] contiendra P(A_{n,l})  
    for l in range(1, k + 1):  
        if l < n:  
            P.append(0)  
        elif l == n:  
            P.append(p ** n)  
        else:  
            s = p ** n  
            for i in range(1, n + 1):  
                s += p ** (i - 1) * q * P[l - i - 1]  
            P.append(s)  
    return P
```

Le décalage $P[l - i - 1]$ traduit $P(A_{\{n, l-i\}})$, la liste étant indexée à partir de 0 . On construit les valeurs **par ordre croissant de l** , de sorte que celles dont on a besoin sont déjà calculées.

Q36. Pour $k < n$, l'événement est impossible : $P(A_{\{n,k\}}) = 0$. Pour $k = n$, il faut les n piles d'affilée : $P(A_{\{n,n\}}) = p^n$.

Q37. Décomposons selon les n premiers lancers, comme en **Q30**, mais sans oublier le cas favorable immédiat :

- les n premiers lancers donnent tous pile — probabilité p^n — et l'événement est **déjà réalisé** ;
- sinon, le premier face survient au rang $i \leq n$, avec la probabilité $p^{i-1}q$, et tout recommence pour les $k - i$ lancers restants.

D'où

$$P(A_{\{n,k\}}) = p^n + q \cdot P(A_{\{n,k-1\}}) + pq \cdot P(A_{\{n,k-2\}}) + \dots + p^{n-1}q \cdot P(A_{\{n,k-n\}}).$$

La différence avec **Q30** tient au terme constant p^n : ici l'événement est **cumulatif**, il ne se produit pas « exactement au rang k ».

Q39. Cherchons une suite constante $v_k = v$. La relation demandée s'écrit

$$v = p^n + v \cdot q \cdot \sum_{i=1}^n p^{i-1} = p^n + v(1 - p^n),$$

en réutilisant le calcul de **Q31**. Donc $v \cdot p^n = p^n$, et comme $p \neq 0$:

$$v = 1.$$

Q40. Posons $u_k = 1 - P(A_{\{n,k\}})$. En retranchant la relation de **Q39** (avec $v = 1$) de celle de **Q37**, le terme constant p^n disparaît et il reste

$$u_k = q \cdot u_{k-1} + pq \cdot u_{k-2} + \dots + p^{n-1}q \cdot u_{k-n} \text{ pour } k > n,$$

qui est exactement la relation $(\star)$. Les conditions initiales s'en déduisent :

$$b_i = u_i = 1 - P(A_{\{n,i\}}) = 1 \text{ pour } 1 \leq i \leq n - 1, \text{ et } b_n = 1 - p^n.$$

Le passage au complémentaire est le geste décisif : il transforme une récurrence **affine** en une récurrence **linéaire**, à laquelle toute la théorie s'applique.

Partie D · II — La majoration géométrique et ses conséquences (Q41 à Q45)

- **Q41** — encadrement et décroissance de (u_k) .

Q41. Pour $k \geq n$, $P(A_{\{n,k\}}) \geq p^n > 0$, donc $u_k < 1$. Et $P(A_{\{n,k\}}) < 1$, car la suite des k lancers peut ne donner que des faces — événement de probabilité $q^k > 0$ — donc $u_k > 0$. Ainsi

$$0 < u_k < 1.$$

Pour la décroissance : $A_{\{n,k\}} \subset A_{\{n,k+1\}}$, puisqu'une série de n piles obtenue en k lancers l'est a fortiori en $k+1$. La probabilité croît donc, et (u_k) **décroît**.

- **Q42** — la majoration $u_k \leq \alpha^{k-n}$ pour un $\alpha \in [M, 1[$.

Q42. Les rapports u_{i+1}/u_i sont strictement inférieurs à 1 par décroissance stricte, donc $M < 1$.

Comme $f(1) = p^n > 0$ et que f est continue, f reste positive sur un voisinage à gauche de 1 : on peut choisir

$$\alpha \in [M, 1[\text{ tel que } f(\alpha) \geq 0.$$

Initialisation. Pour k entre $n+1$ et $2n$, la définition de M donne $u_{i+1} \leq M \cdot u_i \leq \alpha \cdot u_i$, et $u_n < 1$: en cascade, $u_{\{n+j\}} \leq \alpha^j$ pour $j \leq n$.

Hérédité d'ordre n . Soit $k > 2n$, et supposons $u_j \leq \alpha^{j-n}$ pour tout j compris entre $n+1$ et $k-1$. Alors

$$u_k = q \cdot \sum_{i=1}^n p^{i-1} u_{k-i} \leq q \cdot \sum_{i=1}^n p^{i-1} \alpha^{k-i-n} = \alpha^{k-n} \cdot (q/\alpha^n) \cdot \sum_{i=1}^n p^{i-1} \alpha^{n-i}.$$

Or $f(\alpha) \geq 0$ signifie précisément $q \cdot \sum_{i=1}^n p^{i-1} \alpha^{n-i} \leq \alpha^n$, donc le facteur entre parenthèses est ≤ 1 et

$$u_k \leq \alpha^{k-n}.$$

- **Q43** — la probabilité d'obtenir un jour n piles consécutifs.

Q43. La suite $(A_{\{n,k\}})_k$ est **croissante** pour l'inclusion, donc par continuité croissante

$$P(u_{\{k \geq 1\}} A_{\{n,k\}}) = \lim_k P(A_{\{n,k\}}) = \lim_k (1 - u_k) = 1,$$

puisque $0 < u_k \leq \alpha^{k-n} \rightarrow 0$ avec $\alpha < 1$.

Autrement dit, **presque sûrement**, une succession d'au moins n piles finit par apparaître. Le raisonnement valant pour tout n , il vaut pour $n = 10\,000$: l'affirmation est justifiée.

Et comme une intersection dénombrable d'événements presque sûrs l'est encore, on obtient presque sûrement des séries arbitrairement longues — il suffit d'attendre.

- **Q44** — une application numérique : cinq piles en cent lancers.

Q44. Avec $n = 5$, $p = 1/2$ et $\alpha = 0,9827$, la majoration de **Q42** donne

$$u_{\{100\}} \leq \alpha^{\{100-5\}} = \alpha^{\{95\}} \leq 0,193.$$

Donc

$$P(A_{\{5,100\}}) = 1 - u_{\{100\}} \geq 1 - 0,193 = 0,807 \geq 0,8.$$

En lançant cent fois une pièce équilibrée, on a **plus de 80 % de chances** d'observer au moins cinq piles consécutifs — un résultat contre-intuitif, et c'est ce qui permet de repérer une série de lancers inventée par un humain, qui n'ose jamais écrire de si longues séries.

- **Q45** — la démarche à suivre pour obtenir la forme close, sans les calculs.

Q45. La démarche calque celle de la partie B, appliquée cette fois à (u_k) :

1. **Poser la récurrence linéaire.** D'après **Q40**, (u_k) vérifie $(*)$, une récurrence linéaire d'ordre n à coefficients constants.
2. **Écrire la matrice compagnon M_n** associée, sur le modèle de **Q16**, de sorte que le vecteur des n valeurs consécutives vérifie $V_{k+1} = M_n V_k$.
3. **Reconnaître son polynôme caractéristique** : c'est exactement $\chi(X) = X^n - q \cdot \sum_{i=1}^n p^{i-1} X^{n-i}$, c'est-à-dire la fonction f de l'introduction.
4. **Montrer que les n racines sont distinctes**, ce qui rend M_n diagonalisable dans $\mathbb{C}$, et donne $u_k = \sum_i c_i \mu_i^k$.
5. **Montrer que tous les modules sont < 1** . Si $|\mu| \geq 1$ était racine, alors $|\mu|^n \leq q \cdot \sum_{i=1}^n p^{i-1} |\mu|^{n-i}$, c'est-à-dire $f(|\mu|) \leq 0$; or $f(1) = p^n > 0$ et f est croissante au-delà de 1 , d'où une contradiction.
6. **Conclure** : $P(A_{\{n,k\}}) = 1 - u_k = 1 - \sum_i c_i \mu_i^k$, avec $|\mu_i| < 1$, ce qui redonne au passage la convergence vers 1 établie en **Q43**, et cette fois avec une vitesse explicite.