



P U L S A R S

CORRECTION INDÉPENDANTE

Centrale-Supélec 2026 — Mathématiques 1 (PC)

SESSION	NIVEAU	DURÉE	FILIÈRES
2026	CPGE	—	PC

Correction indépendante rédigée par Pulsars. Elle n'est ni officielle ni affiliée à l'organisateur du concours. Les énoncés ne sont pas reproduits : le sujet officiel reste consultable sur le site du concours.

Partie A · I — Équation réduite de l'ellipse (Q1 à Q5)

F et F' sont les points de coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$ avec $0 < c < a$, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, et $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M tels que $MF + MF' = 2a$.

- Q1 — l'inégalité triangulaire, puis $FF' \geq |MF - MF'|$.

Q1. L'inégalité triangulaire dans le triangle MFF' s'écrit

$$FF' \leq MF + MF', \text{ et aussi } MF \leq MF' + F'F \text{ et } MF' \leq MF + FF'.$$

Ces deux dernières donnent $MF - MF' \leq FF'$ et $MF' - MF \leq FF'$, c'est-à-dire

$$|MF - MF'| \leq FF'.$$

- Q2 — en déduire que $MF - MF' \pm 2a$ ne s'annule pas.

Q2. Les foyers sont distants de $FF' = 2c$, et l'hypothèse est $c < a$. Donc

$$|MF - MF'| \leq 2c < 2a,$$

ce qui signifie $MF - MF' \in]-2a, 2a[$. En particulier $MF - MF' \neq 2a$ et $MF - MF' \neq -2a$: les deux quantités $MF - MF' - 2a$ et $MF - MF' + 2a$ sont **non nulles**.

- Q3 — une équivalence sous forme de produit de quatre facteurs.

Q3. Un produit de réels est nul si et seulement si l'un des facteurs l'est.

Or $MF' + MF + 2a > 0$ — somme de deux distances et de $2a > 0$ — et les deux derniers facteurs ne s'annulent pas d'après Q2.

Le produit est donc nul si et seulement si $MF' + MF - 2a = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $M \in \mathcal{E}$.

- Q4 — la forme $((MF')^2 + (MF)^2 - 4a^2)^2 = 4(MF')^2(MF)^2$.

Q4. Regroupons les facteurs deux par deux, en posant $u = MF$ et $v = MF'$:

$$(v + u - 2a)(v + u + 2a) = (u + v)^2 - 4a^2, (u - v - 2a)(u - v + 2a) = (u - v)^2 - 4a^2.$$

Le produit des quatre facteurs vaut donc $[(u+v)^2 - 4a^2] \cdot [(u-v)^2 - 4a^2]$.

Or, en développant l'identité $X^2 - Y^2 = (X-Y)(X+Y)$ avec $X = u^2 + v^2 - 4a^2$ et $Y = 2uv$:

$$\begin{aligned}(u^2 + v^2 - 4a^2)^2 - 4u^2v^2 &= (u^2 + v^2 - 4a^2 - 2uv)(u^2 + v^2 - 4a^2 + 2uv) \\ &= [(u - v)^2 - 4a^2] \cdot [(u + v)^2 - 4a^2].\end{aligned}$$

C'est exactement le produit de Q3. L'équivalence annoncée en découle :

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow ((MF')^2 + (MF)^2 - 4a^2)^2 = 4(MF')^2(MF)^2.$$

- **Q5** — l'équation réduite $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Q5. Avec $M(x, y) : MF^2 = (x-c)^2 + y^2$ et $MF'^2 = (x+c)^2 + y^2$. Posons $S = x^2 + y^2 + c^2$. Alors $MF^2 + MF'^2 = 2S$, et $MF^2 \cdot MF'^2 = (S - 2cx)(S + 2cx) = S^2 - 4c^2x^2$.

L'égalité de **Q4** devient $(2S - 4a^2)^2 = 4(S^2 - 4c^2x^2)$, soit après division par 4 :

$$(S - 2a^2)^2 = S^2 - 4c^2x^2, \text{ d'où } -4a^2S + 4a^4 + 4c^2x^2 = 0,$$

c'est-à-dire $a^2(x^2 + y^2 + c^2) = a^4 + c^2x^2$. En regroupant :

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Comme $b^2 = a^2 - c^2$, cela s'écrit $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, soit en divisant par $a^2b^2 > 0$:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

Partie A · II — Étude d'une fonction (Q6 à Q8)

f est définie sur $[0, a]$ par $f(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ — la moitié supérieure droite de l'ellipse.

- Q6 — tableau de variations, et tangentes à C_f en $(0, b)$ et $(a, 0)$.

Q6. La fonction est dérivable sur $]0, a[$ et

$$f'(x) = b \cdot (-2x/a^2) / (2\sqrt{1 - x^2/a^2}) = -bx / (a\sqrt{a^2 - x^2}).$$

Sur $]0, a[$, le numérateur est strictement négatif et le dénominateur strictement positif : $f' < 0$, la fonction est **strictement décroissante** de $f(0) = b$ à $f(a) = 0$.

x	0		a
signe de f'	0	-	
f	b	↘	0

Tangente en $(0, b)$: $f'(0) = 0$, la tangente est **horizontale**, d'équation $y = b$.

Tangente en $(a, 0)$: quand $x \rightarrow a^-$, $\sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow 0^+$ donc $f'(x) \rightarrow -\infty$. La courbe admet une **tangente verticale**, d'équation $x = a$.

- Q7 — tracé de C_f .

Q7. Le tracé figure dans le sujet et n'est pas reproduit ici. La courbe part de $(0, b)$ avec une tangente horizontale, décroît en restant concave, et rejoint $(a, 0)$ avec une tangente verticale : c'est le **quart d'ellipse** du premier quadrant.

- Q8 — représentation de $\mathcal{E}$, avec les sommets et les foyers.

Q8. L'ellipse complète s'obtient par symétrie de C_f par rapport aux deux axes — l'équation réduite de Q5 n'y fait intervenir que x^2 et y^2 .

On y place :

- $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$, extrémités du **grand axe** $[A'A]$, de longueur $2a$;
- $B(0, b)$ et $B'(0, -b)$, extrémités du **petit axe** $[B'B]$, de longueur $2b$;
- $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$, les **foyers**, situés sur le grand axe entre le centre et les sommets puisque $c < a$.

C'est le cadre du problème : une planète décrit une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Partie A · III — Paramètres de l'ellipse (Q9, Q10)

On pose $e = c/a$, l'excentricité.

- **Q9** — montrer $e \in]0, 1[$, puis exprimer c et b avec a et e .

Q9. L'hypothèse $(a, c) \in (\mathbb{R}_{+}^{*})^2$ avec $c < a$ donne $0 < c/a < 1$, donc

$$e \in]0, 1[.$$

De $e = c/a$ on tire $c = a \cdot e$, puis

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{a^2 - a^2 e^2} = a\sqrt{1 - e^2},$$

la racine étant définie puisque $e < 1$.

- **Q10** — allure de $\mathcal{E}$ selon que e est proche de 0 ou de 1 .

Q10. Le rapport des demi-axes vaut $b/a = \sqrt{1 - e^2}$.

- **e proche de 0** : $b/a \rightarrow 1$, les deux axes sont presque égaux et les foyers presque confondus avec le centre. L'ellipse est **quasi circulaire** — c'est le cas des orbites planétaires du système solaire, dont l'excentricité est faible.
- **e proche de 1** : $b/a \rightarrow 0$, le petit axe s'écrase devant le grand. Les foyers se rapprochent des sommets A et A' , et l'ellipse est **très allongée** — l'allure d'une orbite cométaire.

Partie B — Mouvement des planètes massives (Q11 à Q15)

Trois planètes, décrites par les vecteurs $\mathbf{H}_t$ et $\mathbf{L}_t$, liés par $\mathbf{G}_t = \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}_t$ et $\mathbf{K}_t = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}_t$, où $\mathbf{G}_t$ et $\mathbf{K}_t$ sont les vecteurs des dérivées.

- **Q11** — établir $\mathbf{F}_t = \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_t$ avec $\mathbf{A} = -\mathbf{B}^2$.

Q11. Par définition, $\mathbf{G}_t$ est le vecteur des dérivées premières des $\mathbf{h}_i$, donc $\mathbf{G}_t = \mathbf{H}'_t$; de même $\mathbf{K}_t = \mathbf{L}'_t$. Les deux relations de l'énoncé s'écrivent donc

$$\mathbf{H}'_t = \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}_t \text{ et } \mathbf{L}'_t = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}_t.$$

La matrice $\mathbf{B}$ étant à coefficients **constants**, on peut dériver la première :

$$\mathbf{F}_t = \mathbf{H}''_t = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{L}_t)' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}'_t = \mathbf{B} \cdot (-\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}_t) = -\mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{H}_t.$$

D'où $\mathbf{F}_t = \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_t$ avec $\mathbf{A} = -\mathbf{B}^2$.

- **Q12** — diagonalisabilité de $\mathbf{A}$, qui a trois valeurs propres réelles distinctes et négatives.

Q12. $\mathbf{A}$ est une matrice de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ possédant **trois valeurs propres réelles distinctes** $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

Une matrice carrée d'ordre n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable : les sous-espaces propres sont en somme directe et chacun est de dimension au moins 1, ce qui force la dimension 1 pour chacun et une somme égale à $\mathbb{R}^3$.

Il existe donc $\mathbf{Q} \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \cdot \mathbf{Q}^{-1}$.

- **Q13** — équation différentielle vérifiée par chaque y_i , où $\mathbf{Y}_t = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{H}_t$.

Q13. Posons $\mathbf{Y}_t = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{H}_t$. Comme $\mathbf{Q}$ est constante, on peut dériver deux fois sous le produit :

$$\mathbf{Y}''_t = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{H}''_t = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}_t = \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{Q} \cdot \text{diag}(\lambda_i) \cdot \mathbf{Q}^{-1}) \cdot \mathbf{H}_t = \text{diag}(\lambda_i) \cdot \mathbf{Y}_t.$$

Lue coordonnée par coordonnée, cette égalité donne, pour $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$y_i'' = \lambda_i \cdot y_i, \text{ c'est-à-dire } y_i'' - \lambda_i y_i = 0,$$

équation différentielle **linéaire d'ordre 2, homogène, à coefficients constants**.

- **Q14** — expression générale des y_i .

Q14. Comme $\lambda_i < 0$, posons $\omega_i = \sqrt{-\lambda_i} > 0$. L'équation caractéristique $r^2 - \lambda_i = 0$ a pour racines $\pm i\omega_i$, imaginaires pures. Les solutions réelles sont donc

$$y_i(t) = \alpha_i \cdot \cos(\omega_i t) + \beta_i \cdot \sin(\omega_i t), \text{ avec } (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2,$$

ou, sous forme condensée, $y_i(t) = C_i \cdot \cos(\omega_i t + \varphi_i)$.

Le mouvement est une superposition d'oscillations sinusoïdales — c'est ce qui rend les trajectoires quasi périodiques, et ce qui a permis à Le Verrier de prédire une position.

- **Q15** — inversibilité de B , puis expression des h_i et des l_i .

Q15. Les valeurs propres de A sont non nulles, donc A est inversible. De $A = -B^2$ on tire $\det(A) = -\det(B)^2 \cdot (-1)^{?} \dots$ plus simplement : $\det(B)^2 = \det(B^2) = \det(-A) = -\det(A) \neq 0$, donc $\det(B) \neq 0$ et $B \in GL_3(\mathbb{R})$.

De $Y_t = Q^{-1}H_t$ on tire $H_t = Q \cdot Y_t$: les fonctions h_1, h_2, h_3 sont les trois composantes du vecteur $Q \cdot Y_t$, c'est-à-dire des combinaisons linéaires des y_i à coefficients les colonnes de Q .

Enfin, de $H'_t = B \cdot L_t$ et de l'inversibilité de B :

$$L_t = B^{-1} \cdot H'_t = B^{-1} \cdot Q \cdot Y'_t,$$

les l_i étant les composantes de ce vecteur, exprimées à l'aide des dérivées y'_i .

Partie C · I — La méthode de Le Verrier (Q16 à Q19)

S_1 , S_2 , S_3 désignent les sommes des valeurs propres, de leurs carrés et de leurs cubes, et $P_A = \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \alpha_3 X^3$.

- **Q16** — $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, et l'invariance de la trace par similitude.

Q16. En écrivant les coefficients diagonaux :

$$\text{Tr}(AB) = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji},$$

et de même $\text{Tr}(BA) = \sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij}$. Les deux sommes portent sur les mêmes termes : $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Si $A' = P^{-1}AP$, alors en appliquant ce résultat au couple (P^{-1}, AP) :

$$\text{Tr}(A') = \text{Tr}(P^{-1}(AP)) = \text{Tr}((AP)P^{-1}) = \text{Tr}(A).$$

Deux matrices semblables ont donc **même trace**.

- **Q17** — $\text{Tr}(A)$, $\text{Tr}(A^2)$ et $\text{Tr}(A^3)$ en fonction des S_i .

Q17. De $A = Q \cdot \text{diag}(\lambda_i) \cdot Q^{-1}$ on tire, pour tout $k \geq 1$,

$$A^k = Q \cdot \text{diag}(\lambda_i^k) \cdot Q^{-1},$$

les facteurs $Q^{-1}Q$ se simplifiant. A^k est donc semblable à $\text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k)$, et par **Q16** :

$$\text{Tr}(A) = S_1, \text{Tr}(A^2) = S_2, \text{Tr}(A^3) = S_3.$$

- **Q18** — le polynôme caractéristique et ses coefficients en fonction des λ_i .

Q18. A étant semblable à $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, son polynôme caractéristique est celui de cette matrice diagonale :

$$P_A(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3).$$

En développant :

$$P_A(X) = X^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)X^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)X - \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Par identification : $\alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$, $\alpha_1 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$, et $\alpha_0 = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

- Q19 — α_1 et α_2 en fonction de S_1 et S_2 .

Q19. Le coefficient α_2 est immédiat :

$$\alpha_2 = -S_1.$$

Pour α_1 , on part de l'identité remarquable

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3),$$

c'est-à-dire $S_1^2 = S_2 + 2\alpha_1$, d'où

$$\alpha_1 = (S_1^2 - S_2)/2.$$

Avec la valeur admise $\alpha_0 = (3S_1S_2 - S_1^3 - 2S_3)/6$, tout le polynôme caractéristique s'exprime à l'aide des seules traces de A , A^2 et A^3 — ce sont les identités de Newton. C'est la trouvaille de Le Verrier : obtenir le spectre sans jamais calculer un déterminant.

Partie C · II — Étude d'un cas particulier (Q20 à Q23)

$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 11 & 13 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ et $R = X^3 + X^2 - 14X - 24$.

- **Q20** — trigonalisation sur $\mathbb{C}$; les relations de **Q19** restent-elles valables ?

Q20. Sur $\mathbb{C}$, tout polynôme non constant est scindé : le polynôme caractéristique de A l'est, et toute matrice de $M_3(\mathbb{C})$ est trigonalisable. Il existe donc $Q \in GL_3(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure telles que $A = QTQ^{-1}$.

Oui, les relations restent valables. Les coefficients diagonaux de T sont les valeurs propres de A , comptées avec multiplicité, et $A^k = QT^kQ^{-1}$ a pour trace la somme des λ_i^k — la puissance d'une matrice triangulaire étant triangulaire, de diagonale les puissances. Les identités de **Q19** ne demandaient rien de plus que cela : ni diagonalisabilité, ni valeurs propres distinctes.

- **Q21** — les trois traces, et le polynôme caractéristique.

Q21. Posons $M = 2A$, à coefficients entiers, et calculons sur M — on divisera ensuite par la puissance de 2 correspondante.

$\text{Tr}(M) = -4 + 1 + 1 = -2$, donc $\text{Tr}(A) = -1$ et $S_1 = -1$.

Les coefficients diagonaux de M^2 valent 16, $1 + 49 = 50$ et $49 + 1 = 50$, donc $\text{Tr}(M^2) = 116$ et $\text{Tr}(A^2) = 116/4 = 29$, soit $S_2 = 29$.

Pour M^3 , on utilise $M^2 = \begin{bmatrix} 16 & 58 & 38 \\ 0 & 50 & 14 \\ 0 & 14 & 50 \end{bmatrix}$; les coefficients diagonaux de $M^3 = M^2M$ valent -64 , $50 + 98 = 148$ et $98 + 50 = 148$, donc $\text{Tr}(M^3) = 232$ et

$\text{Tr}(A^3) = 232/8 = 29$, soit $S_3 = 29$.

Les formules de **Q19** donnent alors

$\alpha_2 = -S_1 = 1$, $\alpha_1 = (S_1^2 - S_2)/2 = (1 - 29)/2 = -14$,

$\alpha_0 = (3S_1S_2 - S_1^3 - 2S_3)/6 = (-87 + 1 - 58)/6 = -24$.

D'où $P_A = X^3 + X^2 - 14X - 24 = R$.

- **Q22** — les valeurs propres.

Q22. Cherchons une racine évidente de R . Pour $X = -2$:

$-8 + 4 + 28 - 24 = 0$.

On factorise donc par $X + 2$: $R = (X + 2)(X^2 - X - 12) = (X + 2)(X - 4)(X + 3)$.

Les valeurs propres de A sont -3 , -2 et 4 .

- **Q23** — une matrice de passage Q diagonalisant A .

Q23. Elles sont distinctes, donc A est diagonalisable. Cherchons les vecteurs propres de $M = 2A$, dont les valeurs propres sont -6 , -4 et 8 .

- $\mu = -4$: le système donne $5y + 7z = 0$ et $7y + 5z = 0$, d'où $y = z = 0$ et x libre : $e_1 = (1, 0, 0)$.
- $\mu = -6$: $7y + 7z = 0$ donne $z = -y$, puis $2x + 11y + 13z = 0$ devient $2x - 2y = 0$, d'où $x = y$: $e_2 = (1, 1, -1)$.
- $\mu = 8$: $-7y + 7z = 0$ donne $z = y$, puis $-12x + 24y = 0$, d'où $x = 2y$: $e_3 = (2, 1, 1)$.

La matrice Q ayant ces vecteurs pour colonnes convient :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } Q^{-1}AQ = \text{diag}(-2, -3, 4).$$

L'ordre des valeurs propres sur la diagonale est celui des colonnes de Q : e_1 est associé à -2 , e_2 à -3 et e_3 à 4 .

Partie D · I — Perturbation de rang 1 : solutions et spectre (Q24 à Q29)

$D = \text{diag}(a, b, c)$ avec $a < b < c$, $U = (u, v, w)$ à coordonnées non nulles, $T = UU^T$ et $D(t) = D + tT$. L'équation (E_t) est

$$u^2/(\lambda-a) + v^2/(\lambda-b) + w^2/(\lambda-c) = 1/t.$$

- **Q24, Q25** — deux identités vérifiées par une valeur propre λ de $D(t)$.
- **Q26** — λ est solution de (E_t) .

Q26. Il suffit de développer le membre de gauche. La matrice $(\lambda I_3 - D)^{-1}$ est diagonale de coefficients $1/(\lambda-a)$, $1/(\lambda-b)$, $1/(\lambda-c)$, donc

$$U^T(\lambda I_3 - D)^{-1}U = u^2/(\lambda-a) + v^2/(\lambda-b) + w^2/(\lambda-c).$$

L'égalité de **Q25** est donc exactement l'équation (E_t) : λ en est solution.

- **Q27** — variations de F , et ses deux zéros $p_1 < p_2$.

Q27. F est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{a, b, c\}$, avec

$$F'(\lambda) = -u^2/(\lambda-a)^2 - v^2/(\lambda-b)^2 - w^2/(\lambda-c)^2 < 0,$$

les trois numérateurs étant strictement positifs. F est donc **strictement décroissante sur chacun des quatre intervalles** $]-\infty, a[$, $]a, b[$, $]b, c[$ et $]c, +\infty[$.

Les limites se lisent terme à terme : $F \rightarrow 0^-$ en $-\infty$, $F \rightarrow 0^+$ en $+\infty$, et à chaque pôle $F \rightarrow -\infty$ à gauche, $F \rightarrow +\infty$ à droite.

λ	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
F	$0^- \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0^+$	

Sur $]-\infty, a[$, F reste strictement négative, et sur $]c, +\infty[$ strictement positive : aucun zéro. Sur $]a, b[$ et $]b, c[$, F est continue strictement décroissante de $+\infty$ à $-\infty$: elle s'annule **une fois et une seule** sur chacun.

D'où deux zéros $p_1 \in]a, b[$ et $p_2 \in]b, c[$, avec $p_1 < p_2$.

- **Q28** — (E_t) admet trois solutions réelles distinctes.

Q28. L'équation (E_t) s'écrit $F(\lambda) = 1/t$. On applique le théorème de la bijection sur chaque intervalle.

Si $t > 0$, alors $1/t > 0$, et F prend les valeurs strictement positives :

- sur $]a, b[$, entre a et p_1 : une solution $\lambda_1(t) \in]a, p_1[$;
- sur $]b, c[$, entre b et p_2 : une solution $\lambda_2(t) \in]b, p_2[$;
- sur $]c, +\infty[$, où F décroît de $+\infty$ à 0^+ : une solution $\lambda_3(t) > c$.

Sur $]-\infty, a[$, $F < 0$: aucune solution.

Si $t < 0$, alors $1/t < 0$, et symétriquement :

- $\lambda_1(t) < a$ sur $]-\infty, a[$, où F décroît de 0^- à $-\infty$;
- $\lambda_2(t) \in]p_1, b[$;
- $\lambda_3(t) \in]p_2, c[$.

Dans les deux cas, (E_t) admet **trois solutions réelles distinctes** $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \lambda_3(t)$.

- **Q29** — solutions de (E_t) et spectre de $D(t)$ coïncident.

Q29. Les questions **Q24** à **Q26** montrent que toute valeur propre de $D(t)$ n'appartenant pas à $\{a, b, c\}$ est solution de (E_t) .

Réciproquement, soit λ une solution de (E_t) et posons $X = (\lambda I_3 - D)^{-1}U$, vecteur non nul puisque U l'est. Alors

$$D(t)X - \lambda X = (D - \lambda I_3)X + tU(U^T X) = -U + tU \cdot (1/t) = 0,$$

en utilisant $U^T X = U^T (\lambda I_3 - D)^{-1}U = 1/t$. Donc λ est **valeur propre** de $D(t)$.

L'équation a exactement trois solutions distinctes (**Q28**), qui sont donc trois valeurs propres distinctes de $D(t)$; une matrice d'ordre 3 n'en ayant pas davantage, les deux ensembles **coïncident** — et aucun des réels a, b, c n'est valeur propre de $D(t)$.

Q24. La matrice $\lambda I_3 - D = \text{diag}(\lambda - a, \lambda - b, \lambda - c)$ est diagonale à coefficients non nuls puisque $\lambda \notin \{a, b, c\}$: elle est **inversible**.

Soit X un vecteur propre de $D(t)$ associé à λ :

$$(D + tUU^T)X = \lambda X, \text{ soit } tUU^TX = (\lambda I_3 - D)X.$$

En multipliant à gauche par $(\lambda I_3 - D)^{-1}$:

$$X = t(\lambda I_3 - D)^{-1}UU^TX,$$

puis en multipliant à gauche par U^T :

$$U^TX = t \cdot U^T(\lambda I_3 - D)^{-1}UU^TX.$$

Q25. La quantité U^TX est un **scalaire**. Elle est non nulle : si elle était nulle, l'égalité

$$X = t(\lambda I_3 - D)^{-1}U \cdot (U^TX)$$
 donnerait $X = 0$, ce qui est exclu pour un vecteur propre.

On peut donc simplifier l'égalité de **Q24** par U^TX , ce qui laisse

$$1 = t \cdot U^T(\lambda I_3 - D)^{-1}U, \text{ c'est-à-dire } U^T(\lambda I_3 - D)^{-1}U = 1/t.$$

Partie D · II — Les limites (Q30 à Q34)

$g_1, \dots, g_4$ désignent les réciproques des restrictions de F aux quatre intervalles $]-\infty, a[$, $]a, b[$, $]b, c[$ et $]c, +\infty[$.

- **Q30** — existence des g_i , valeur de $g_2(0)$, limites de g_2 en $\pm\infty$.

Q30. Sur chacun des quatre intervalles, F est **continue et strictement décroissante** (Q27) : elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image, et la réciproque g_i existe, continue et strictement décroissante.

Les images se lisent sur le tableau de variations : $F(]-\infty, a[) =]-\infty, 0[$, $F(]a, b[) = \mathbb{R}$, $F(]b, c[) = \mathbb{R}$ et $F(]c, +\infty[) =]0, +\infty[$.

$g_2(0)$ est l'antécédent de 0 par F dans $]a, b[$: c'est le zéro ρ_1 , donc

$$g_2(0) = \rho_1.$$

Enfin, g_2 étant décroissante de $\mathbb{R}$ sur $]a, b[$:

$$\lim_{+\infty} g_2 = a \text{ et } \lim_{-\infty} g_2 = b.$$

- **Q31** — les $\lambda_i(t)$ en fonction des g_i .

Q31. Il suffit de reprendre la localisation des solutions établie en Q28, puisque λ est solution de (E_t) si et seulement si $F(\lambda) = 1/t$.

Pour $t > 0$: $\lambda_1(t) = g_2(1/t)$, $\lambda_2(t) = g_3(1/t)$, $\lambda_3(t) = g_4(1/t)$.

Pour $t < 0$: $\lambda_1(t) = g_1(1/t)$, $\lambda_2(t) = g_2(1/t)$, $\lambda_3(t) = g_3(1/t)$.

Le décalage d'indice entre les deux cas est le point délicat : selon le signe de t , la perturbation pousse les valeurs propres vers la droite ou vers la gauche, et ce n'est pas la même « case » qui accueille la plus petite.

- **Q32** — λ_1 se prolonge par continuité à $\mathbb{R}$.

Q32. Étudions les deux limites en 0 .

Quand $t \rightarrow 0^+$, on a $1/t \rightarrow +\infty$, donc $\lambda_1(t) = g_2(1/t) \rightarrow a$ d'après Q30.

Quand $t \rightarrow 0^-$, on a $1/t \rightarrow -\infty$. Or g_1 est la réciproque de F sur $]-\infty, a[$, où F décroît de 0^- vers $-\infty$: quand son argument tend vers $-\infty$, g_1 tend vers a . Donc $\lambda_1(t) \rightarrow a$.

Les deux limites coïncident : λ_1 se prolonge en une fonction **continue sur $\mathbb{R}$** en posant $\lambda_1(0) = a$.

Ce résultat était attendu : pour $t = 0$, la matrice $D(t)$ se réduit à D , dont le spectre est $\{a, b, c\}$.

• **Q33** — dérivabilité et valeur de $\lambda_1'(0)$.

Q33. Partons de l'équation $F(\lambda_1(t)) = 1/t$, valable pour $t \neq 0$, et multiplions par t :

$$t \cdot u^2 / (\lambda_1(t) - a) + t \cdot v^2 / (\lambda_1(t) - b) + t \cdot w^2 / (\lambda_1(t) - c) = 1.$$

Quand $t \rightarrow 0$, $\lambda_1(t) \rightarrow a$, donc les deux derniers dénominateurs tendent vers $a - b \neq 0$ et $a - c \neq 0$: les deux derniers termes tendent vers 0 . Il reste

$$t \cdot u^2 / (\lambda_1(t) - a) \rightarrow 1, \text{ c'est-à-dire } (\lambda_1(t) - a)/t \rightarrow u^2.$$

Comme $\lambda_1(0) = a$, ce quotient est exactement le taux d'accroissement de λ_1 en 0 : la fonction est **dérivable en 0** , avec

$$\lambda_1'(0) = u^2.$$

Ailleurs, λ_1 est la composée de $t \mapsto 1/t$ et d'une réciproque de F , laquelle est dérivable puisque F est de classe C^1 et que F' ne s'annule pas : λ_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Le même raisonnement, mené sur λ_2 et λ_3 dont les limites en 0 sont b et c , donne

$$\lambda_2'(0) = v^2 \text{ et } \lambda_3'(0) = w^2.$$

• **Q34** — limites de λ_1 en $\pm\infty$, et ce que cela dit de la perturbation.

Q34. Quand $t \rightarrow +\infty$, $1/t \rightarrow 0^+$ et $\lambda_1(t) = g_2(1/t) \rightarrow g_2(0) = p_1$.

Quand $t \rightarrow -\infty$, $1/t \rightarrow 0^-$ et $\lambda_1(t) = g_1(1/t)$. Or g_1 est la réciproque de F sur $] -\infty, a[$, où la valeur 0^- est atteinte « en $-\infty$ » : donc

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \lambda_1(t) = -\infty.$$

Commentaires. Deux enseignements, et ils portent sur des échelles opposées.

Au voisinage de $t = 0$ — le cas qui intéresse Le Verrier, puisque l'erreur sur les coefficients est petite — le développement $\lambda_i(t) \approx \lambda_i(0) + t \cdot \lambda_i'(0)$ donne

$$\lambda_1(t) \approx a + t \cdot u^2, \lambda_2(t) \approx b + t \cdot v^2, \lambda_3(t) \approx c + t \cdot w^2.$$

Chaque valeur propre se décale **proportionnellement à t** , avec un coefficient égal au carré de la composante correspondante de U . Une petite imprécision sur la matrice ne déplace donc le spectre que d'un ordre comparable : le calcul est **stable**, ce qui justifie a posteriori la démarche.

Pour de grandes perturbations, en revanche, le comportement change de nature : deux valeurs propres restent bornées et tendent vers les zéros p_1 et p_2 de F , tandis que la troisième part à l'infini. La perturbation étant de **rang 1**, elle n'emporte qu'une seule direction.