



P U L S A R S

CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Baccalauréat général 2026 — Mathématiques, spécialité (jour 2)

SESSION Session 2026 — 17 juin 2026	NIVEAU Terminale	DURÉE 4 h	BARÈME 20 points
---	----------------------------	---------------------	----------------------------

Corrigé rédigé par Pulsars. Les lectures graphiques sont signalées comme telles : elles dépendent de la figure du sujet, que ce document ne reproduit pas. Le sujet original reste téléchargeable sur pulsars.science.

Dans le repère orthonormé $(0 ; i, j, k)$, on considère les points :

$A(2 ; 1 ; 1)$, $B(3 ; -2 ; 0)$, $C(0 ; -1 ; 1)$ et $D(0 ; 0 ; 2)$.

(Une figure représentant le tétraèdre $ABCD$ accompagne l'énoncé dans le PDF.)

1. Montrer que les points A , B et C définissent un plan.

1. Calculons deux vecteurs :

$AB(3 - 2 ; -2 - 1 ; 0 - 1)$, soit $AB(1 ; -3 ; -1)$; $AC(0 - 2 ; -1 - 1 ; 1 - 1)$, soit $AC(-2 ; -2 ; 0)$.

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires : la troisième coordonnée de AC est nulle alors que celle de AB ne l'est pas, donc aucun réel λ ne vérifie $AC = \lambda AB$.

Les points A , B et C ne sont donc pas alignés : ils **définissent un plan**.

2. a. Montrer que le vecteur $n(1 ; -1 ; 4)$ est normal au plan (ABC) .

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x - y + 4z - 5 = 0$.

2. a. Il suffit de vérifier que n est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan :

$$n \cdot AB = 1 \times 1 + (-1) \times (-3) + 4 \times (-1) = 1 + 3 - 4 = 0 \quad \checkmark$$

$$n \cdot AC = 1 \times (-2) + (-1) \times (-2) + 4 \times 0 = -2 + 2 + 0 = 0 \quad \checkmark$$

Le vecteur $n(1 ; -1 ; 4)$ est donc **normal au plan (ABC)** .

2. b. Le plan (ABC) admet une équation de la forme $x - y + 4z + d = 0$ (les coefficients sont les coordonnées d'un vecteur normal).

Le point $A(2 ; 1 ; 1)$ appartient à ce plan :

$$2 - 1 + 4 \times 1 + d = 0, \text{ donc } 5 + d = 0, \text{ soit } d = -5.$$

Une équation cartésienne est donc **$x - y + 4z - 5 = 0$** . $\checkmark$

3. Vérifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ passant par D et orthogonale au plan (ABC) est donnée par :

$$x = t, y = -t, z = 2 + 4t, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

3. La droite Δ passe par D et est orthogonale au plan (ABC) : elle admet donc $n(1 ; -1 ; 4)$ comme vecteur directeur.

La représentation paramétrique proposée a précisément pour vecteur directeur $(1 ; -1 ; 4)$, et pour $t = 0$ elle donne le point $(0 ; 0 ; 2)$, c'est-à-dire D .

C'est donc bien une représentation paramétrique de Δ . $\checkmark$

4. Montrer que le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est le point $H(-1/6 ; 1/6 ; 4/3)$.

4. Le projeté orthogonal H de D sur (ABC) est le point d'intersection de Δ et du plan (ABC) .

On injecte les coordonnées d'un point de Δ dans l'équation du plan :

$$t - (-t) + 4(2 + 4t) - 5 = 0$$

$$t + t + 8 + 16t - 5 = 0$$

$$18t + 3 = 0$$

$$t = -1/6.$$

On reporte cette valeur :

$$\bullet x = -1/6 ;$$

$$\bullet y = -(-1/6) = 1/6 ;$$

$$\bullet z = 2 + 4 \times (-1/6) = 2 - 2/3 = 4/3.$$

Donc **$H(-1/6 ; 1/6 ; 4/3)$** . $\checkmark$

5. ◦ a. Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.

◦ b. Montrer que l'aire du triangle ABC est $3\sqrt{2}$.

5. a. Calculons les longueurs des côtés issus de B :

$BA(-1 ; 3 ; 1)$, donc $BA = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11}$; $BC(-3 ; 1 ; 1)$, donc $BC = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11}$.

Comme $BA = BC$, le triangle ABC est isocèle en B. ✓

5. b. Puisque le triangle est isocèle en B, la hauteur issue de B tombe sur le milieu M de [AC] :

$M((2 + 0)/2 ; (1 - 1)/2 ; (1 + 1)/2) = M(1 ; 0 ; 1)$.

$BM(1 - 3 ; 0 + 2 ; 1 - 0)$, soit $BM(-2 ; 2 ; 1)$, donc $BM = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$.

La base AC mesure $AC = \sqrt{4 + 4 + 0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

D'où l'aire :

$\mathcal{A}(ABC) = (1/2) \times AC \times BM = (1/2) \times 2\sqrt{2} \times 3 = 3\sqrt{2}$. ✓

6. ◦ a. En déduire que le volume du tétraèdre ABCD est égal à 1.

On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = (1/3) \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

◦ b. On admet que la distance du point A au plan (BCD) est égale à $\sqrt{2}$. En déduire l'aire du triangle BCD.

6. a. La hauteur du tétraèdre relative à la base ABC est la distance de D au plan (ABC), c'est-à-dire DH.

$DH(-1/6 - 0 ; 1/6 - 0 ; 4/3 - 2)$, soit $DH(-1/6 ; 1/6 ; -2/3)$.

$DH = \sqrt{(1/36 + 1/36 + 4/9)} = \sqrt{(1/36 + 1/36 + 16/36)} = \sqrt{(18/36)} = \sqrt{(1/2)} = \sqrt{2}/2$.

D'où :

$V = (1/3) \times 3\sqrt{2} \times (\sqrt{2}/2) = (1/3) \times (3 \times 2)/2 = (1/3) \times 3 = 1$. ✓

(On peut aussi utiliser directement la formule de distance d'un point à un plan : $|0 - 0 + 8 - 5|/\sqrt{18} = 3/(3\sqrt{2}) = \sqrt{2}/2$.)

6. b. Le volume ne dépend pas de la base choisie. En prenant BCD comme base et A comme sommet :

$V = (1/3) \times \mathcal{A}(BCD) \times \text{dist}(A, (BCD)) = 1$.

Avec $\text{dist}(A, (BCD)) = \sqrt{2}$:

$(1/3) \times \mathcal{A}(BCD) \times \sqrt{2} = 1$, donc $\mathcal{A}(BCD) = 3/\sqrt{2} = 3\sqrt{2}/2$.

L'aire du triangle BCD vaut $3\sqrt{2}/2$, soit environ 2,12.

7. Dans cette question, on note D_k le point ayant pour coordonnées $(0 ; 0 ; k)$ où k est un réel.

◦ a. Déterminer la valeur de k pour laquelle les points A, B, C et D_k sont coplanaires. Quel est alors le projeté orthogonal du point D_k sur le plan (ABC) ?

◦ b. Peut-on trouver une valeur de k telle que A soit le projeté orthogonal de D_k sur le plan (ABC) ?

7. a. A, B, C et D_k sont coplanaires si et seulement si D_k appartient au plan (ABC) :

$0 - 0 + 4k - 5 = 0$, donc $k = 5/4$.

Dans ce cas, D_k appartient au plan : son projeté orthogonal sur (ABC) est lui-même, c'est-à-dire le point $D_{\{5/4\}}(0 ; 0 ; 5/4)$.

7. b. A serait le projeté orthogonal de D_k si et seulement si le vecteur D_kA était orthogonal au plan, c'est-à-dire colinéaire au vecteur normal $n(1 ; -1 ; 4)$.

$D_kA(2 - 0 ; 1 - 0 ; 1 - k)$, soit $D_kA(2 ; 1 ; 1 - k)$.

S'il existait λ tel que $D_kA = \lambda n$, on aurait simultanément :

• $2 = \lambda \times 1$, donc $\lambda = 2$;

• $1 = \lambda \times (-1)$, donc $\lambda = -1$.

Ces deux conditions sont incompatibles, et elles ne font pas intervenir k .

Non, aucune valeur de k ne convient : quel que soit le point de l'axe (Oz) choisi, son projeté orthogonal sur (ABC) n'est jamais A.

Un bassin destiné à l'élevage des truites contient 30 000 litres d'eau, régulièrement renouvelée.

Pour vérifier la présence éventuelle de substances polluantes dans le bassin, on procède à des analyses régulières.

On étudie dans les deux parties ci-dessous un cas de contamination de l'eau par une substance polluante à l'aide de deux modèles différents. **Les deux parties sont indépendantes.**

Partie A : modèle discret

On note V_n le volume, en litre, de la substance polluante présente dans le bassin, n heures après le début du phénomène de pollution. On a ainsi $V_0 = 0$.

On admet que pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 0,995V_n + 6$.

1. Calculer V_1 et V_2 .

$$1. V_1 = 0,995 \times 0 + 6 = 6.$$

$$V_2 = 0,995 \times 6 + 6 = 5,97 + 6 = 11,97.$$

Après une heure, le bassin contient 6 L de substance polluante ; après deux heures, 11,97 L.

2. Recopier et compléter le programme ci-dessous pour qu'il renvoie le volume en litre de substance polluante présente dans le bassin après n heures.

```
def volume(n):
    v = ...
    for k in range(n):
        v = .....
    return v
```

2.

```
def volume(n):
    v = 0
    for k in range(n):
        v = 0.995*v + 6
    return v
```

La variable v part de $V_0 = 0$, et la boucle applique n fois la relation de récurrence : à la sortie, v contient V_n .

3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$.

3. Montrons par récurrence la propriété P_n : « $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$ ».

Initialisation : $V_0 = 0$ et $V_1 = 6$. On a bien $0 \leq 6 \leq 1200$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons P_n vraie pour un entier naturel n fixé, c'est-à-dire $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$.

Multiplions cet encadrement par $0,995 > 0$ (l'ordre est conservé), puis ajoutons 6 :

$$0,995V_n + 6 \leq 0,995V_{n+1} + 6 \leq 0,995 \times 1200 + 6.$$

$$\text{Or } 0,995V_n + 6 = V_{n+1}, \quad 0,995V_{n+1} + 6 = V_{n+2}, \text{ et } 0,995 \times 1200 + 6 = 1194 + 6 = 1200.$$

On obtient donc $V_{n+1} \leq V_{n+2} \leq 1200$: P_{n+1} est vraie.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n , $V_n \leq V_{n+1} \leq 1200$.

4. Justifier que la suite (V_n) converge, et calculer sa limite.

4. D'après la question 3, la suite (V_n) est croissante et majorée par 1200 : d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers une limite ℓ .

En passant à la limite dans la relation $V_{n+1} = 0,995V_n + 6$:

$$\ell = 0,995\ell + 6$$

$$0,005\ell = 6$$

$$\ell = 1200.$$

La quantité de substance polluante tend vers 1 200 litres.

Partie B : modèle continu

On note $v(t)$ le volume, en litre, de la substance polluante présente dans le bassin à l'instant t , en heure.

On admet que la fonction v est définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, et on note v' sa fonction dérivée.

On considère que le phénomène de pollution débute au temps $t = 0$; ainsi $v(0) = 0$. On admet que la fonction v est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' = -0,005y + 6,$$

où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y .

1.
 - a. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0 ; +\infty[$.
 - b. Montrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$: $v(t) = 1200(1 - e^{(-0,005t)})$.
 - c. Calculer la limite de v en $+\infty$.
 - d. Déterminer le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. a. (E) : $y' = -0,005y + 6$ est du type $y' = ay + b$ avec $a = -0,005$ et $b = 6$.

Ses solutions sur $[0 ; +\infty[$ sont les fonctions :

$$t \mapsto Ke^{(-0,005t)} - b/a = Ke^{(-0,005t)} + 6/0,005, \text{ soit } t \mapsto Ke^{(-0,005t)} + 1200, \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

1. b. La fonction v est l'une de ces solutions, et $v(0) = 0$:

$$K + 1200 = 0, \text{ donc } K = -1200.$$

Ainsi $v(t) = -1200e^{(-0,005t)} + 1200$, c'est-à-dire :

$$v(t) = 1200(1 - e^{(-0,005t)}). \checkmark$$

1. c. Quand $t \rightarrow +\infty$, $e^{(-0,005t)} \rightarrow 0$, donc :

$$\lim v(t) = 1200 \times (1 - 0) = 1200.$$

Les deux modèles s'accordent sur cette valeur limite de 1 200 litres.

1. d. $v'(t) = 1200 \times 0,005 \times e^{(-0,005t)} = 6e^{(-0,005t)}$.

L'exponentielle étant strictement positive, $v'(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$: la fonction v est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

La pollution augmente donc continûment, mais de plus en plus lentement.

2. Un taux de substance polluante supérieur à 5 % du volume du bassin nécessite un nettoyage complet. Selon ce modèle, le propriétaire devra-t-il procéder à ce nettoyage ?

2. 5 % du volume du bassin représentent :

$$0,05 \times 30\,000 = 1\,500 \text{ litres}.$$

Or, d'après les questions 1.c et 1.d, la fonction v est croissante et de limite 1200, donc :

$$v(t) < 1200 < 1500 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Non : selon ce modèle, le taux de substance polluante ne dépassera jamais 5 % du volume du bassin. Le propriétaire n'aura pas à procéder au nettoyage complet.

3. Pour pouvoir dépolluer rapidement le bassin et éviter de lourdes conséquences sur l'élevage, il est préconisé que le volume de la substance polluante ne dépasse pas 50 litres.

Déterminer la valeur exacte de l'instant au-delà duquel le volume de la substance dépasse 50 litres dans le bassin. En donner la valeur en heure et minute, arrondie à la minute.

3. Résolvons $v(t) > 50$:

$$1200(1 - e^{-0,005t}) > 50$$

$$1 - e^{-0,005t} > 50/1200 = 1/24$$

$$e^{-0,005t} < 1 - 1/24 = 23/24.$$

La fonction $\ln$ étant strictement croissante :

$$-0,005t < \ln(23/24)$$

$$t > -\ln(23/24)/0,005 = \ln(24/23)/0,005.$$

La **valeur exacte** cherchée est :

$$t = 200 \ln(24/23) \text{ heures.}$$

Numériquement : $200 \times \ln(24/23) \approx 200 \times 0,04256 \approx 8,512$ heures.

$$0,512 \times 60 \approx 31 \text{ minutes.}$$

Le volume de substance polluante dépasse 50 litres au bout de **8 heures et 31 minutes** environ. C'est le délai dont dispose le propriétaire pour intervenir.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On désigne par « musiciens professionnels » l'ensemble des femmes et hommes pratiquant un instrument de manière professionnelle.

1. Une étude a été réalisée auprès des musiciens professionnels pratiquant différents genres musicaux (Pop, Rap, Rock, Classique, etc.). Cette étude indique que :

- 52 % des musiciens professionnels jouent de la Pop ;
- parmi les musiciens professionnels jouant de la Pop, 32 % sont des femmes ;
- 20 % des musiciens professionnels sont des femmes.

On choisit au hasard une personne dans l'ensemble des musiciens professionnels. On note :

- 0 l'évènement : « la personne joue de la Pop » ;
- F l'évènement : « la personne est une femme ».

Affirmation 1 : si la personne choisie est une femme, alors la probabilité qu'elle joue de la Pop est de $0,832$.

2. La proportion de musiciens professionnels au sein de la population active dans le secteur de la culture est estimée à 6,2 %. On prélève au hasard et de manière indépendante un échantillon de 5 000 personnes au sein de cette population. La population considérée est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout échantillon ainsi défini, associe le nombre de musiciens professionnels dans l'échantillon.

Affirmation 1 : VRAIE.

L'énoncé donne $P(0) = 0,52$, $P_0(F) = 0,32$ et $P(F) = 0,20$.

On cherche $P_F(0)$, c'est-à-dire la probabilité de jouer de la Pop sachant que la personne est une femme.

D'abord l'intersection :

$$P(0 \cap F) = P(0) \times P_0(F) = 0,52 \times 0,32 = 0,1664.$$

Puis :

$$P_F(0) = P(0 \cap F) / P(F) = 0,1664 / 0,20 = 0,832. \checkmark$$

Attention au piège classique : $P_0(F)$ et $P_F(0)$ sont deux nombres très différents ($0,32$ contre $0,832$). Ce n'est pas parce que peu de musiciens Pop sont des femmes que peu de musiciennes jouent de la Pop.

Affirmation 2 : en arrondissant le résultat au dixième, on a $P(X \leq 340) \approx 0,4$.

Affirmation 2 : FAUSSE.

L'expérience consiste à répéter 5 000 fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de succès « la personne est musicien professionnel », de probabilité $p = 0,062$.

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 5\,000$ et $p = 0,062$, d'espérance :

$$E(X) = np = 5\,000 \times 0,062 = 310.$$

Or $340 > 310$: la valeur 340 se situe au-dessus de l'espérance, donc $P(X \leq 340)$ est nécessairement supérieure à 0,5. Une valeur de 0,4 est impossible.

La calculatrice confirme : $P(X \leq 340) \approx 0,962$, soit 1,0 arrondi au dixième.

Affirmation 3 : en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on peut affirmer qu'il y a plus de 95 % de chance que, sur cet échantillon de 5 000 actifs dans le secteur de la culture, le nombre de musiciens professionnels soit strictement compris entre 230 et 390.

3. Un jeu sur le thème de la culture de la Pop est proposé à 10 personnes dont 4 sont des musiciens professionnels. Deux équipes de 5 joueurs s'affrontent. Elles sont chacune constituées de 2 musiciens professionnels et de 3 personnes qui ne le sont pas.

Affirmation 3 : VRAIE.

La variance de la loi binomiale vaut :

$$V(X) = np(1 - p) = 5\,000 \times 0,062 \times 0,938 = 290,78.$$

L'encadrement $230 < X < 390$ s'écrit $|X - 310| < 80$: c'est un écart à l'espérance strictement inférieur à $\delta = 80$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(|X - 310| \geq 80) \leq V(X)/\delta^2 = 290,78 / 6\,400 \approx 0,0454.$$

En passant à l'évènement contraire :

$$P(230 < X < 390) \geq 1 - 0,0454 = 0,9546.$$

Comme $0,9546 > 0,95$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet bien d'affirmer qu'il y a **plus de 95 % de chance** que le nombre de musiciens professionnels soit strictement compris entre 230 et 390. ✓

Affirmation 4 : on peut former ainsi 120 équipes différentes.

Affirmation 4 : VRAIE.

Une équipe est constituée de 2 musiciens professionnels choisis parmi les 4, et de 3 non-professionnels choisis parmi les $10 - 4 = 6$.

L'ordre des joueurs dans une équipe n'intervient pas : on compte des **combinaisons**.

- choix des 2 musiciens parmi 4 : $(4 \text{ choisir } 2) = 6$;
- choix des 3 non-musiciens parmi 6 : $(6 \text{ choisir } 3) = 20$.

Ces deux choix sont indépendants, donc le nombre d'équipes possibles est :

$$6 \times 20 = 120. \quad \checkmark$$

Remarque : une fois la première équipe formée, la seconde est entièrement déterminée — et elle comporte bien elle aussi 2 musiciens professionnels et 3 autres joueurs.

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ dont on donne dans le sujet une partie de la courbe représentative C_f dans un repère orthogonal. On note f' sa fonction dérivée.

On précise que :

- la courbe C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point C d'abscisse 1 ;
- la tangente T_A à la courbe C_f au point $A(1/2 ; 0)$ passe par le point $B(1 ; e^2)$.

1. À l'aide du graphique :

- a. Donner $f'(1)$.
- b. Donner la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0 ; 3]$.

1. a. Au point C d'abscisse 1, la tangente est **parallèle à l'axe des abscisses**, donc horizontale : son coefficient directeur est nul.

$$f'(1) = 0.$$

1. b. La courbe coupe l'axe des abscisses au point $A(1/2 ; 0)$, et en ce point seulement sur $[0 ; 3]$.

La solution de $f(x) = 0$ est donc $x = 1/2$.

2. Déterminer $f'(1/2)$.

2. $f'(1/2)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A , qui passe par $A(1/2 ; 0)$ et $B(1 ; e^2)$:

$$f'(1/2) = (e^2 - 0) / (1 - 1/2) = e^2 / (1/2) = 2e^2.$$

3. Parmi les trois courbes C_1 , C_2 et C_3 données dans le sujet, deux représentent des primitives de la fonction f . Indiquer lesquelles et justifier.

3. Ce sont les courbes C_1 et C_2 .

Le raisonnement s'appuie sur deux propriétés :

(i) **Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.** Leurs courbes représentatives se déduisent donc l'une de l'autre par une **translation verticale** : elles ont exactement la même forme, et leurs extremums sont à la **même abscisse**.

(ii) **Le sens de variation d'une primitive F est donné par le signe de f .** D'après la partie A, f est négative sur $[0 ; 1/2[$, s'annule en $1/2$ et est positive sur $]1/2 ; +\infty[$.

Toute primitive de f est donc **décroissante puis croissante, avec un minimum à l'abscisse $1/2$** .

Sur le graphique, C_3 atteint son minimum à une abscisse nettement supérieure à $1/2$: elle ne peut pas être une primitive de f . En revanche C_1 et C_2 ont toutes deux leur minimum à l'abscisse $1/2$, et se déduisent l'une de l'autre par translation verticale.

Vérification supplémentaire, une fois connue l'expression de f (partie B) : les primitives de f sont les fonctions

$F(x) = -xe^{(-2x+3)} + k$. On a alors $F(0) = k$ et $F(x) \rightarrow k$ quand $x \rightarrow +\infty$: chaque primitive **part de la même hauteur que son asymptote horizontale**, et sa descente vaut $F(0) - F(1/2) = 0,5e^2 \approx 3,7$. C'est bien ce qu'on observe sur C_1 et C_2 .

Partie B

Un industriel doit créer un logo représentant la forme donnée en figure 1 du sujet. La dimension de $0,3 \text{ cm}$ indiquée sur la figure est une contrainte imposée par le client.

L'industriel choisit de modéliser le contour de ce logo à l'aide d'une portion de la courbe de la fonction f vue en partie A, et de l'image de cette portion par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses, sur un intervalle $[0,5 ; \alpha]$. Le nombre α est un réel supérieur à 1 que l'on déterminera dans cette partie.

L'ensemble est représenté graphiquement dans un repère orthonormé (figure 2) d'unité 1 cm.

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (2x - 1)e^{(-2x+3)}.$$

1. ◦ a. Vérifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

$$f(x) = e^2 \times (2x - 1) / e^{(2x-1)}.$$

- b. En déduire la limite de f en $+\infty$. (On pourra poser $X = 2x - 1$.)

1. a. Pour tout réel x :

$$e^{(-2x+3)} = e^{(2 - (2x - 1))} = e^2 \times e^{-(2x-1)} = e^2 / e^{(2x-1)}.$$

Donc :

$$f(x) = (2x - 1) \times e^2 / e^{(2x-1)} = e^2 \times (2x - 1) / e^{(2x-1)}. \checkmark$$

1. b. Posons $X = 2x - 1$. Quand $x \rightarrow +\infty$, on a $X \rightarrow +\infty$, et :

$$f(x) = e^2 \times X / e^X.$$

Or, par **croissances comparées**, $X/e^X \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow +\infty$.

Donc $\lim f(x) = e^2 \times 0 = 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

La courbe C_f admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $+\infty$.

2. ◦ a. Montrer que pour tout x de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = (-4x + 4)e^{(-2x+3)}$.

- b. Construire le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. a. f est un produit uv avec $u(x) = 2x - 1$ et $v(x) = e^{(-2x+3)}$.

$$u'(x) = 2 \text{ et } v'(x) = -2e^{(-2x+3)}.$$

$$f'(x) = u'v + uv' = 2e^{(-2x+3)} + (2x - 1) \times (-2)e^{(-2x+3)}$$

$$f'(x) = e^{(-2x+3)} \times [2 - 2(2x - 1)]$$

$$f'(x) = e^{(-2x+3)} \times (2 - 4x + 2)$$

$$f'(x) = (-4x + 4)e^{(-2x+3)}. \checkmark$$

2. b. L'exponentielle est strictement positive, donc $f'(x)$ est du signe de $-4x + 4 = 4(1 - x)$:

- $f'(x) > 0$ pour $x < 1$;
- $f'(1) = 0$;
- $f'(x) < 0$ pour $x > 1$.

Valeurs remarquables :

- $f(0) = (-1) \times e^3 = -e^3 \approx -20,09$;
- $f(1) = 1 \times e^1 = e \approx 2,72$;
- $\lim f(x) = 0$ en $+\infty$ (question 1.b).

x	0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+	0	-	
variations de f	$-e^3$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

3. Justifier que la contrainte imposée par le client se traduit par l'égalité $f(\alpha) = 0,15$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de α dans l'intervalle $[1 ; +\infty[$ qui permette de vérifier cette égalité. En donner une valeur arrondie au dixième.

3. Le contour du logo est formé de la portion de courbe et de son symétrique par rapport à l'axe des abscisses. À l'abscisse α , l'écart vertical entre les deux morceaux vaut donc :

$$f(\alpha) - (-f(\alpha)) = 2f(\alpha).$$

La contrainte du client impose $2f(\alpha) = 0,3$, c'est-à-dire :

$$f(\alpha) = 0,15. \checkmark$$

Sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante (question 2.b), avec $f(1) = e \approx 2,72$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$ en $+\infty$.

Elle réalise donc une bijection de $[1 ; +\infty[$ sur $]0 ; e]$. Comme $0 < 0,15 \leq e$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'une unique solution α dans $[1 ; +\infty[$.

Par balayage à la calculatrice :

$$f(3,3) \approx 0,153 \text{ et } f(3,4) \approx 0,136,$$

donc $3,3 < \alpha < 3,4$, et plus précisément $\alpha \approx 3,31$.

Arrondie au dixième : $\alpha \approx 3,3$.

Partie C

On fabrique un porte-clé en découpant une plaque d'acier suivant la forme du logo représenté par la surface grisée en figure 2 de la partie B. On précise que cette plaque a une épaisseur de $0,2 \text{ cm}$.

1. On considère I , l'intégrale de f entre $0,5$ et $3,3$.

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale I arrondie au dixième est égale à $3,6$.

1. On calcule $I = \int_{0,5}^{3,3} (2x - 1)e^{(-2x+3)} dx$ par parties, avec :

- $u(x) = 2x - 1$ et $u'(x) = 2$;
- $v'(x) = e^{(-2x+3)}$ et $v(x) = -(1/2)e^{(-2x+3)}$.

Ces fonctions sont dérivables et à dérivées continues sur $[0,5 ; 3,3]$.

$$I = \left[-(2x - 1)/2 \times e^{(-2x+3)} \right]_{0,5}^{3,3} + \int_{0,5}^{3,3} e^{(-2x+3)} dx$$

Premier terme : en $x = 3,3$, $-(5,6/2)e^{(-3,6)} = -2,8e^{(-3,6)} \approx -0,0765$; en $x = 0,5$, $2x - 1 = 0$ donc le terme est nul.

Le crochet vaut donc environ $-0,0765$.

Second terme :

$$\int_{0,5}^{3,3} e^{(-2x+3)} dx = \left[-(1/2)e^{(-2x+3)} \right]_{0,5}^{3,3} = -(1/2)e^{(-3,6)} + (1/2)e^2 \approx -0,0137 + 3,6945 = 3,6809.$$

$$\text{Total : } I \approx -0,0765 + 3,6809 = 3,6044.$$

Arrondie au dixième, $I \approx 3,6$. $\checkmark$

(On peut aussi vérifier directement que $F(x) = -xe^{(-2x+3)}$ est une primitive de f , ce qui donne

$$I = F(3,3) - F(0,5) = -3,3e^{(-3,6)} + 0,5e^2 \approx 3,604.)$$

2. On précise que le volume du porte-clé est égal à :

Aire du logo $\times$ épaisseur de la plaque.

Déterminer le volume du porte-clé en cm^3 , arrondi au dixième.

2. La partie du logo située au-dessus de l'axe des abscisses a pour aire I (en unité d'aire, soit ici en cm^2 puisque le repère est orthonormé d'unité 1 cm).

Le logo étant symétrique par rapport à l'axe des abscisses, son aire totale vaut :

$$\mathcal{A} = 2I \approx 2 \times 3,6044 \approx 7,21 \text{ cm}^2.$$

Le volume du porte-clé est donc :

$$V = \mathcal{A} \times 0,2 \approx 7,21 \times 0,2 \approx 1,44 \text{ cm}^3.$$

Arrondi au dixième : $V \approx 1,4 \text{ cm}^3$.