



P U L S A R S

CORRIGÉ DÉTAILLÉ

## Baccalauréat général 2026 — Mathématiques, spécialité (jour 1)

|                                                   |                            |                     |                            |
|---------------------------------------------------|----------------------------|---------------------|----------------------------|
| SESSION<br><b>Session 2026 — 16<br/>juin 2026</b> | NIVEAU<br><b>Terminale</b> | DURÉE<br><b>4 h</b> | BARÈME<br><b>20 points</b> |
|---------------------------------------------------|----------------------------|---------------------|----------------------------|

Corrigé rédigé par Pulsars. Les lectures graphiques sont signalées comme telles : elles dépendent de la figure du sujet, que ce document ne reproduit pas. Le sujet original reste téléchargeable sur [pulsars.science](https://pulsars.science).

Un navire assure la liaison entre deux ports de la Méditerranée. Lors d'une traversée, une famille a la possibilité de réserver une cabine ainsi qu'un emplacement pour un véhicule.

### Partie A

Parmi l'ensemble des familles effectuant la traversée, on constate que 30 % réservent un emplacement pour un véhicule et, parmi ces dernières, 80 % réservent une cabine.

On sait par ailleurs que 75 % des familles effectuant la traversée réservent une cabine.

On choisit au hasard une famille effectuant la traversée, et on considère les événements suivants :

- $V$  : « la famille réserve un emplacement pour un véhicule » ;
- $C$  : « la famille réserve une cabine ».

Pour un événement quelconque  $E$ , on désigne par  $\bar{E}$  son événement contraire et par  $P(E)$  sa probabilité.

1.
  - a. Donner  $P(C)$ .
  - b. Reproduire l'arbre pondéré du sujet et compléter les quatre pointillés. (L'arbre figure dans le PDF : un premier niveau  $V / \bar{V}$ , puis  $C / \bar{C}$  sur chacune des deux branches.)

1. a. L'énoncé donne directement la proportion de familles qui réservent une cabine :  $P(C) = 0,75$ .

1. b. Les quatre pointillés de l'arbre sont :

- sur la première branche :  $P(V) = 0,3$  et  $P(\bar{V}) = 1 - 0,3 = 0,7$  ;
- sur les branches issues de  $V$  :  $P_V(C) = 0,8$  et  $P_V(\bar{C}) = 1 - 0,8 = 0,2$ .

Les branches issues de  $\bar{V}$  restent inconnues à ce stade : c'est l'objet de la question 4.

2. Calculer la probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine.

2. Par la formule des probabilités composées :

$$P(V \cap C) = P(V) \times P_V(C) = 0,3 \times 0,8 = 0,24.$$

24 % des familles réservent à la fois un emplacement pour un véhicule et une cabine.

3. Une famille a réservé une cabine. Déterminer la probabilité qu'elle réserve un emplacement pour un véhicule.

3. On cherche cette fois une probabilité conditionnelle sachant  $C$  :

$$P_C(V) = P(V \cap C) / P(C) = 0,24 / 0,75 = 0,32.$$

Parmi les familles qui réservent une cabine, 32 % réservent aussi un emplacement pour un véhicule.

4. Déterminer  $P_{\bar{V}}(C)$ . On arrondira le résultat à  $10^{-2}$ . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. D'après la formule des probabilités totales,  $C$  se décompose selon  $V$  et  $\bar{V}$  :

$$P(C) = P(V \cap C) + P(\bar{V} \cap C), \text{ donc } P(\bar{V} \cap C) = 0,75 - 0,24 = 0,51.$$

D'où :

$$P_{\bar{V}}(C) = P(\bar{V} \cap C) / P(\bar{V}) = 0,51 / 0,7 \approx 0,73.$$

**Interprétation :** parmi les familles qui ne réservent pas d'emplacement pour un véhicule, environ 73 % réservent tout de même une cabine.

On remarque que  $0,73 < 0,80$  : réserver un emplacement pour un véhicule rend la réservation d'une cabine un peu plus fréquente. Les deux événements ne sont pas indépendants.

## Partie B

Sur ce trajet, la réservation d'une cabine et d'un emplacement pour un véhicule sont facturés en supplément du coût de la traversée.

Ces suppléments sont d'un montant de :

- 100 € pour une cabine ;
- 70 € pour l'emplacement d'un véhicule.

On suppose qu'une famille peut réserver au maximum une cabine et au maximum un emplacement pour un véhicule.

À ces suppléments peuvent s'ajouter le prix payé pour des extras (repas, boissons, etc.).

On note  $X$  la variable aléatoire qui associe, à chaque famille effectuant la traversée, le prix qu'elle paie, en euro, pour les suppléments. On donne ci-dessous la loi de probabilité de  $X$ .

| $x_i$        | 0    | 70   | 100  | 170  |
|--------------|------|------|------|------|
| $P(X = x_i)$ | 0,19 | 0,06 | 0,51 | 0,24 |

On note  $Y$  la variable aléatoire qui associe, à chaque famille effectuant la traversée, le prix qu'elle paie, en euro, pour les extras. On admet que  $Y$  a pour espérance  $E(Y) = 104$  et pour variance  $V(Y) = 1686$ .

On suppose que les variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

1. Justifier que  $E(X) = 96$  et que  $V(X) = 3114$ .

1. L'espérance est la moyenne des valeurs pondérées par leurs probabilités :

$$E(X) = 0 \times 0,19 + 70 \times 0,06 + 100 \times 0,51 + 170 \times 0,24$$

$$E(X) = 0 + 4,2 + 51 + 40,8 = 96.$$

Pour la variance, on utilise  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$  :

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,19 + 70^2 \times 0,06 + 100^2 \times 0,51 + 170^2 \times 0,24$$

$$E(X^2) = 294 + 5\,100 + 6\,936 = 12\,330.$$

$$\text{Donc } V(X) = 12\,330 - 96^2 = 12\,330 - 9\,216 = 3\,114. \checkmark$$

2. À titre exceptionnel, la compagnie propose une remise de 40 % sur les suppléments et les extras. On note  $Z$  la variable aléatoire qui, à chaque famille effectuant la traversée, associe le montant total payé pour les suppléments et les extras, en euro, payé par cette famille après réduction.

- a. Justifier que  $Z = 0,6(X + Y)$ .
- b. En déduire que  $E(Z) = 120$  et que  $V(Z) = 1728$ .

2. a. Une remise de 40 % signifie que la famille paie  $100 \% - 40 \% = 60 \%$  du montant.

Le montant total avant réduction est  $X + Y$  (suppléments plus extras), donc le montant payé après réduction est :

$$Z = 0,6 \times (X + Y).$$

2. b. L'espérance est linéaire, sans hypothèse d'indépendance :

$$E(Z) = 0,6 \times (E(X) + E(Y)) = 0,6 \times (96 + 104) = 0,6 \times 200 = 120.$$

Pour la variance, on utilise  $V(aT) = a^2V(T)$  et l'additivité de la variance, valable ici car  $X$  et  $Y$  sont indépendantes :

$$V(Z) = 0,6^2 \times (V(X) + V(Y)) = 0,36 \times (3\,114 + 1\,686) = 0,36 \times 4\,800 = 1\,728. \checkmark$$

3. On note  $n$  un entier naturel non nul et on choisit au hasard un échantillon de  $n$  familles effectuant cette traversée bénéficiant de la réduction exceptionnelle définie en question 2. On admet que ce choix peut être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par  $Z_1$  la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la première famille,  $Z_2$  celle de la deuxième famille, et ainsi de suite jusqu'à  $Z_n$ .

On considère la variable aléatoire  $M_n = (Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) / n$  donnant le prix total moyen pour les suppléments et les extras, payé par ces familles.

On admet que les variables  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité que la variable aléatoire  $Z$ .

- a. Montrer que l'espérance  $E(M_n)$  est égale à 120, et que sa variance  $V(M_n)$  est égale à  $1728/n$ .
- b. Déterminer le plus petit entier  $n$  pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que  $P(114 < M_n < 126) \geq 0,85$ . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

3. a. Les  $Z_i$  suivent la même loi que  $Z$ , donc  $E(Z_i) = 120$  et  $V(Z_i) = 1728$ .

Par linéarité de l'espérance :

$$E(M_n) = (1/n) \times (E(Z_1) + \dots + E(Z_n)) = (1/n) \times n \times 120 = 120.$$

Pour la variance, les  $Z_i$  étant **indépendantes**, la variance de la somme est la somme des variances :

$$V(M_n) = (1/n^2) \times (V(Z_1) + \dots + V(Z_n)) = (1/n^2) \times n \times 1728 = 1728/n. \checkmark$$

3. b. L'encadrement  $114 < M_n < 126$  s'écrit  $|M_n - 120| < 6$ , c'est-à-dire un écart à l'espérance strictement inférieur à  $\delta = 6$ .

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(|M_n - E(M_n)| \geq \delta) \leq V(M_n) / \delta^2$$

$$\text{soit } P(|M_n - 120| \geq 6) \leq (1728/n) / 36 = 48/n.$$

En passant à l'évènement contraire :

$$P(114 < M_n < 126) \geq 1 - 48/n.$$

Il suffit donc que  $1 - 48/n \geq 0,85$ , c'est-à-dire  $48/n \leq 0,15$ , soit  $n \geq 48 / 0,15 = 320$ .

**Le plus petit entier convenant est  $n = 320$ .**

**Interprétation :** en interrogeant au moins **320 familles**, on est assuré, avec une probabilité d'au moins 0,85, que le prix moyen payé par ces familles pour les suppléments et les extras se situe entre 114 € et 126 €.

*Remarque : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev ne donne qu'une minoration, souvent très prudente. La probabilité réelle est bien supérieure à 0,85 pour  $n = 320$  ; l'exercice demande le seuil garanti par l'inégalité, pas le seuil réel.*

## Exercice 2 — Vrai/faux : géométrie dans l'espace et dénombrement

4 points

---

*Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.  
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.*

1. L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(0 ; i, j, k)$ . On considère :

- la droite  $(d)$  dont une représentation paramétrique est :

$$x = t, y = -1,5 - t, z = 2 - 2t, \text{ où } t \in \mathbb{R} ;$$

- les points  $A(3 ; 0 ; 2)$  et  $B(2 ; 1 ; -3)$  ;

- le plan  $(P)$  d'équation  $-x + y - 5z - 0,5 = 0$ .

- **a. Affirmation 1 :** le plan  $(P)$  est orthogonal à la droite  $(AB)$ , et passe par le milieu du segment  $[AB]$ .

- **b. Affirmation 2 :** les droites  $(d)$  et  $(AB)$  sont sécantes.

- **c.** On considère le point  $C$  de coordonnées  $(1,5 ; -3 ; -1)$ .

**Affirmation 3 :** la mesure de l'angle  $ACB$ , arrondie à  $10^{-1}$ , est égale à  $70,5^\circ$ .

### 1. a. Affirmation 1 : VRAIE.

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $AB(2 - 3 ; 1 - 0 ; -3 - 2)$ , soit  $AB(-1 ; 1 ; -5)$ .

Le plan  $(P)$  d'équation  $-x + y - 5z - 0,5 = 0$  admet pour vecteur normal  $n(-1 ; 1 ; -5)$ .

Or  $n = \overrightarrow{AB}$  : le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est normal au plan  $(P)$ , donc  $(P)$  est orthogonal à la droite  $(AB)$ .

Le milieu  $I$  de  $[AB]$  a pour coordonnées :

$$I((3 + 2)/2 ; (0 + 1)/2 ; (2 - 3)/2) = I(2,5 ; 0,5 ; -0,5).$$

On vérifie qu'il appartient à  $(P)$  :

$$-2,5 + 0,5 - 5 \times (-0,5) - 0,5 = -2,5 + 0,5 + 2,5 - 0,5 = 0. \checkmark$$

Les deux parties de l'affirmation sont vraies :  $(P)$  est le plan médiateur de  $[AB]$ .

### 1. b. Affirmation 2 : FAUSSE.

Une représentation paramétrique de  $(AB)$ , de point  $A(3 ; 0 ; 2)$  et de vecteur directeur  $\overrightarrow{AB}(-1 ; 1 ; -5)$ , est :

$$x = 3 - s, y = s, z = 2 - 5s, \text{ avec } s \in \mathbb{R}.$$

Les droites  $(d)$  et  $(AB)$  ne sont pas parallèles :  $(1 ; -1 ; -2)$  et  $(-1 ; 1 ; -5)$  ne sont pas colinéaires (les deux premières coordonnées donneraient le coefficient  $-1$ , qui ne convient pas pour la troisième).

Cherchons un point commun. Il faudrait résoudre :

$$t = 3 - s \quad (1) ; \quad -1,5 - t = s \quad (2) ; \quad 2 - 2t = 2 - 5s \quad (3).$$

De (3) :  $-2t = -5s$ , donc  $s = 2t/5$ .

En reportant dans (1) :  $t = 3 - 2t/5$ , donc  $7t/5 = 3$ , soit  $t = 15/7$  et  $s = 6/7$ .

Vérifions (2) :  $-1,5 - 15/7 \approx -3,64$ , alors que  $s = 6/7 \approx 0,86$ . L'égalité est fausse.

Le système n'a pas de solution : les droites n'ont aucun point commun. N'étant ni parallèles ni sécantes, elles sont **non coplanaires**.

### 1. c. Affirmation 3 : VRAIE.

$CA(3 - 1,5 ; 0 + 3 ; 2 + 1)$ , soit  $CA(1,5 ; 3 ; 3)$ .  $CB(2 - 1,5 ; 1 + 3 ; -3 + 1)$ , soit  $CB(0,5 ; 4 ; -2)$ .

Produit scalaire :  $CA \cdot CB = 1,5 \times 0,5 + 3 \times 4 + 3 \times (-2) = 0,75 + 12 - 6 = 6,75$ .

Normes :  $\|CA\| = \sqrt{(1,5)^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{20,25} = 4,5$  et

$\|CB\| = \sqrt{(0,5)^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20,25} = 4,5$ .

Donc :

$\cos(ACB) = (CA \cdot CB) / (\|CA\| \times \|CB\|) = 6,75 / 20,25 = 1/3$ .

$ACB = \arccos(1/3) \approx 70,53^\circ$ , soit  $70,5^\circ$  arrondi à  $10^{-1}$ . ✓

2. Titouan et Clotilde participent à un escape game. Ils se retrouvent dans une salle possédant deux portes de sortie, A et B, chacune protégée par un digicode équipé de 8 touches portant des symboles différents :

- le digicode de la porte A utilise un code de 3 symboles différents devant être saisis dans l'ordre ;
- celui de la porte B utilise un code de 4 symboles différents qui peuvent être saisis dans n'importe quel ordre.

N'étant pas parvenus à obtenir d'indices, ils décident de procéder au hasard à la saisie des codes. Clotilde choisit un code pour la porte A, et Titouan choisit un code pour la porte B.

On considère que les choix des codes sont équiprobables.

**Affirmation 4 :** Titouan a plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

### 2. Affirmation 4 : VRAIE.

**Porte A (Clotilde) :** 3 symboles différents choisis parmi 8, l'**ordre compte**. Le nombre de codes possibles est le nombre d'arrangements de 3 éléments parmi 8 :

$$8 \times 7 \times 6 = 336.$$

La probabilité que Clotilde ouvre sa porte du premier coup est  $1/336 \approx 0,0030$ .

**Porte B (Titouan) :** 4 symboles différents parmi 8, l'**ordre ne compte pas**. Le nombre de codes possibles est le nombre de combinaisons de 4 éléments parmi 8 :

$$(8 \text{ choisir } 4) = 8! / (4! \times 4!) = 70.$$

La probabilité que Titouan ouvre sa porte est  $1/70 \approx 0,0143$ .

Comme  $1/70 > 1/336$ , **Titouan a bien plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde** — environ 4,8 fois plus.

*À retenir : un code plus long n'est pas forcément plus sûr. C'est l'ordre imposé sur la porte A qui multiplie le nombre de possibilités ( $4! = 24$  fois plus de codes pour un même ensemble de symboles).*

On étudie le fonctionnement d'un système de chauffage installé dans une pièce.

Ce système se déclenche automatiquement dès que la température de la pièce est inférieure ou égale à  $18\text{ }^{\circ}\text{C}$ , et s'éteint lorsqu'elle atteint  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

### Partie A : phase de chauffage

Pour une température de la pièce variant de  $18\text{ }^{\circ}\text{C}$  à  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , le système de chauffage fonctionne en continu. La température de la pièce augmente progressivement.

Dans cette partie, on modélise la température de la pièce, en degré Celsius, à l'instant  $t$ , exprimé en dizaines de minutes, par une fonction  $T$  définie sur  $[0 ; +\infty[$ .

On admet que la fonction  $T$  est :

- dérivable sur  $[0 ; +\infty[$  ;
- solution de l'équation différentielle (E) :  $y' = -0,035y + 0,91$ , où  $y$  est une fonction de la variable  $t$ , définie et dérivable sur  $[0 ; +\infty[$ .

On note  $T'$  la fonction dérivée de la fonction  $T$ .

On suppose qu'au début de l'étude, la température de la pièce est de  $18\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Ainsi  $T(0) = 18$ .

1. Donner les solutions de l'équation différentielle (E) sur  $[0 ; +\infty[$ .

1. L'équation (E) :  $y' = -0,035y + 0,91$  est du type  $y' = ay + b$  avec  $a = -0,035$  et  $b = 0,91$ .

Ses solutions sur  $[0 ; +\infty[$  sont les fonctions de la forme :

$t \mapsto Ke^{(at)} - b/a = Ke^{(-0,035t)} + 0,91/0,035$ , où  $K$  est une constante réelle.

Comme  $0,91 / 0,035 = 26$ , les solutions sont les fonctions :

$t \mapsto Ke^{(-0,035t)} + 26$ , avec  $K \in \mathbb{R}$ .

2. En déduire que pour tout nombre réel  $t$  appartenant à l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , on a :

$T(t) = 26 - 8e^{(-0,035t)}$ .

2. La fonction  $T$  est l'une de ces solutions, donc  $T(t) = Ke^{(-0,035t)} + 26$ .

La condition initiale donne :  $T(0) = K \times e^0 + 26 = K + 26 = 18$ , d'où  $K = -8$ .

Ainsi, pour tout  $t \geq 0$  :  $T(t) = 26 - 8e^{(-0,035t)}$ . ✓

3. Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps la pièce atteindra la température de 20 °C. On exprimera le résultat en heures et minutes arrondi à la minute.

3. On résout  $T(t) = 20$  :

$$26 - 8e^{(-0,035t)} = 20$$

$$8e^{(-0,035t)} = 6$$

$$e^{(-0,035t)} = 0,75$$

$$-0,035t = \ln(0,75)$$

$$t = -\ln(0,75) / 0,035 \approx 8,219.$$

$t$  est exprimé en **dizaines de minutes** : cela fait  $8,219 \times 10 \approx 82,2$  minutes.

Soit **1 heure et 22 minutes** (arrondi à la minute).

4. Si une panne du système de chauffage l'empêche de s'éteindre lorsque la température de la pièce atteint 20 °C, la température de la pièce pourra-t-elle dépasser 28 °C selon ce modèle ? Justifier.

4. Étudions la limite de  $T$  en  $+\infty$ . Comme  $-0,035 < 0$ , on a  $e^{(-0,035t)} \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , donc :

$$\lim T(t) = 26.$$

De plus,  $e^{(-0,035t)} > 0$  pour tout  $t$ , donc  $T(t) = 26 - 8e^{(-0,035t)} < 26$  : la fonction  $T$  est strictement croissante et **majorée par 26**.

**Non** : selon ce modèle, la température ne pourra jamais dépasser 26 °C, donc a fortiori jamais atteindre 28 °C. Même en panne, ce chauffage ne peut pas surchauffer la pièce au-delà de 26 °C.

## Partie B : phase de refroidissement

Lorsque la pièce atteint la température de 20 °C, le système de chauffage s'éteint et la pièce refroidit.

On modélise la température de la pièce par la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 20$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{(-0,1n)}$$

où  $n$  est un nombre entier exprimant le temps écoulé en dizaines de minutes.

1. Montrer que  $u_1 = 19,72$ .

1. Pour  $n = 0$  :

$$u_1 = 0,965 \times 20 + 0,35 + 0,07 \times e^{(-0,1 \times 0)} = 19,3 + 0,35 + 0,07 \times 1 = 19,72. \checkmark$$

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n > 10$ .

On admet que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

2. Montrons par récurrence la propriété  $P_n : \ll u_n > 10 \gg$ .

**Initialisation :**  $u_0 = 20 > 10$ , donc  $P_0$  est vraie.

**Hérédité :** supposons  $P_n$  vraie pour un entier naturel  $n$  fixé, c'est-à-dire  $u_n > 10$ .

Comme  $0,965 > 0$ , on a  $0,965u_n > 0,965 \times 10 = 9,65$ .

De plus  $e^{(-0,1n)} > 0$ , donc  $0,07e^{(-0,1n)} > 0$ . En additionnant :

$$u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{(-0,1n)} > 9,65 + 0,35 + 0 = 10.$$

Donc  $u_{n+1} > 10$  :  $P_{n+1}$  est vraie.

**Conclusion :** par récurrence, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 10$ .

3. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

3. La suite  $(u_n)$  est décroissante (admis) et minorée par 10 (question 2). D'après le **théorème de la convergence monotone**, elle est convergente.

4. On note  $\ell$  la limite de la suite  $(u_n)$ .

- a. Justifier que cette limite est solution de l'équation  $x = 0,965x + 0,35$ .
- b. Déterminer  $\ell$  et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. a. Notons  $\ell$  la limite de  $(u_n)$ . Quand  $n \rightarrow +\infty$  :

- $u_n \rightarrow \ell$  et  $u_{n+1} \rightarrow \ell$  (c'est la même suite, décalée d'un rang) ;
- $e^{(-0,1n)} \rightarrow 0$ , donc  $0,07e^{(-0,1n)} \rightarrow 0$ .

En passant à la limite dans l'égalité  $u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{(-0,1n)}$ , on obtient :

$$\ell = 0,965\ell + 0,35.$$

La limite  $\ell$  est donc bien solution de l'équation  $x = 0,965x + 0,35$ .

4. b. Résolvons :

$$x = 0,965x + 0,35 \Leftrightarrow 0,035x = 0,35 \Leftrightarrow x = 10.$$

Donc  $\ell = 10$ .

**Interprétation :** si le chauffage restait éteint indéfiniment, la température de la pièce tendrait vers 10 °C — la température qu'impose l'extérieur. Elle n'atteint jamais cette valeur, elle s'en approche seulement (on a montré en question 2 que  $u_n > 10$  pour tout  $n$ ).

5. On rappelle que le système de chauffage se met en marche automatiquement dès que la température de la pièce est inférieure ou égale à 18 °C.
- a. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 du programme écrit en langage Python ci-dessous, afin qu'il renvoie le nombre de dizaines de minutes à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

```

1. def marche() :
2.     n = 0
3.     u = 20
4.     while ... :
5.         u = ...
6.         n = ...
7.     return n

```

- b. Déterminer le temps, en dizaines de minutes, à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

5. a. On veut le premier rang où la température descend à 18 °C ou en dessous. On continue donc de calculer tant que  $u > 18$  :

```

1. def marche() :
2.     n = 0
3.     u = 20
4.     while u > 18 :
5.         u = 0.965*u + 0.35 + 0.07*exp(-0.1*n)
6.         n = n+1
7.     return n

```

L'ordre des lignes 5 et 6 est essentiel : le terme  $u_{n+1}$  se calcule avec  $e^{(-0,1n)}$ , c'est-à-dire avec la valeur de  $n$  avant incrémentation. Inverser les deux lignes donnerait un résultat faux.

(La fonction `exp` doit être importée, par exemple avec `from math import exp`.)

5. b. En calculant les termes successifs à la calculatrice :

| n     | 0  | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     |
|-------|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $u_n$ | 20 | 19,72 | 19,44 | 19,17 | 18,90 | 18,64 | 18,38 | 18,12 | 17,87 |

On constate que  $u_7 \approx 18,12 > 18$ , tandis que  $u_8 \approx 17,87 \leq 18$ .

Le programme renvoie donc  $n = 8$  : le système de chauffage se remet en marche au bout de 8 dizaines de minutes, soit 1 heure et 20 minutes après son extinction.

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]-1 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = a + b \ln(x + 1) / (x + 1),$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels, et  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur  $]-1 ; +\infty[$ . On note  $f'$  sa fonction dérivée et  $f''$  sa fonction dérivée seconde.

### Partie A

L'objectif de cette partie est de déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$  de sorte que la courbe représentative de la fonction  $f$  sur  $[0 ; +\infty[$  corresponde à celle tracée dans le repère orthonormé du sujet.

(Le graphique figure dans le PDF : la courbe passe par le point  $A(0 ; 1)$ , croît jusqu'à un maximum situé un peu avant  $x = 2$ , puis décroît lentement. La droite  $T_A$  est la tangente à la courbe au point  $A(0 ; 1)$ .)

1. Justifier que  $a = 1$ .

1. Le graphique indique que la courbe passe par le point  $A(0 ; 1)$ , donc  $f(0) = 1$ .

$$\text{Or } f(0) = a + b \times \ln(0 + 1)/(0 + 1) = a + b \times \ln(1)/1 = a + b \times 0 = a.$$

Donc  $a = 1$ .

2. En utilisant le graphique :

- a. Donner la valeur de  $f'(0)$ . Justifier.
- b. Donner le signe de  $f''(1)$ . Justifier.

2. a.  $f'(0)$  est le coefficient directeur de la tangente  $T_A$  à la courbe au point  $A(0 ; 1)$ .

Sur le graphique, cette tangente monte de 4 unités lorsque l'abscisse augmente de 1 :  $f'(0) = 4$ .

2. b. Au voisinage de  $x = 1$ , la courbe est située sous ses tangentes : elle tourne sa concavité vers le bas, la fonction  $y$  est concave.

Or une fonction est concave sur un intervalle si et seulement si sa dérivée seconde  $y$  est négative.

Donc  $f''(1) < 0$ .

(Vérification a posteriori, avec  $b = 4$  : on calcule  $f''(x) = 4(2\ln(x+1) - 3)/(x+1)^3$ , d'où  $f''(1) = 4(2\ln 2 - 3)/8 \approx -0,81 < 0$ .)

3. ◦ a. Montrer que pour tout réel  $x$  appartenant à  $] -1 ; +\infty[$ , on a :

$$f'(x) = b(1 - \ln(x + 1)) / (x + 1)^2.$$

◦ b. En déduire la valeur de  $b$ .

3. a. Posons  $u(x) = \ln(x + 1)$  et  $v(x) = x + 1$ , de sorte que  $f(x) = a + b \times u(x)/v(x)$ .

On a  $u'(x) = 1/(x + 1)$  et  $v'(x) = 1$ . La dérivée d'un quotient donne :

$$(u/v)' = (u'v - uv')/v^2 = [ (1/(x+1)) \times (x+1) - \ln(x+1) \times 1 ] / (x+1)^2$$

$$(u/v)' = (1 - \ln(x + 1)) / (x + 1)^2.$$

La constante  $a$  disparaît en dérivant, donc :

$$f'(x) = b(1 - \ln(x + 1)) / (x + 1)^2. \checkmark$$

3. b. En  $x = 0$  :

$$f'(0) = b(1 - \ln 1)/1^2 = b(1 - 0) = b.$$

Or  $f'(0) = 4$  d'après la lecture graphique, donc  $b = 4$ .

## Partie B

On admet dans la suite de l'exercice que la fonction  $f$  est définie sur  $] -1 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = 1 + 4 \ln(x + 1) / (x + 1).$$

Dans toute cette partie,  $f(x) = 1 + 4 \ln(x + 1)/(x + 1)$ .

1. Justifier que la droite d'équation  $y = 1$  est asymptote à la courbe représentative de la fonction  $f$ .

1. Posons  $X = x + 1$ . Quand  $x \rightarrow +\infty$ , on a  $X \rightarrow +\infty$  et :

$$\ln(x + 1)/(x + 1) = \ln(X)/X \rightarrow 0$$

par **croissances comparées** (le logarithme croît moins vite que la fonction identité).

Donc  $f(x) \rightarrow 1 + 4 \times 0 = 1$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

La droite d'équation  $y = 1$  est donc **asymptote horizontale** à la courbe de  $f$  en  $+\infty$ .

2. Résoudre l'inéquation  $1 - \ln(x + 1) > 0$  sur  $] -1 ; +\infty[$ .

2. Sur  $] -1 ; +\infty[$ , on a  $x + 1 > 0$  et la fonction  $\ln$  est strictement croissante :

$$1 - \ln(x + 1) > 0 \Leftrightarrow \ln(x + 1) < 1 \Leftrightarrow x + 1 < e \Leftrightarrow x < e - 1.$$

L'ensemble des solutions est donc  $] -1 ; e - 1[$  (avec  $e - 1 \approx 1,718$ ).

3. On admet que  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$  quand  $x$  tend vers  $-1$ .

Dresser le tableau de variation complet de la fonction  $f$  en indiquant la valeur exacte de son extremum. Justifier.

3. D'après la question 3.a de la partie A avec  $b = 4$  :

$$f'(x) = 4(1 - \ln(x + 1)) / (x + 1)^2.$$

Le dénominateur  $(x + 1)^2$  est strictement positif sur  $] -1 ; +\infty[$ , et  $4 > 0$  :  $f'(x)$  est du signe de  $1 - \ln(x + 1)$ .

D'après la question 2,  $f'(x) > 0$  sur  $] -1 ; e - 1[$  et  $f'(x) < 0$  sur  $] e - 1 ; +\infty[$ , avec  $f'(e - 1) = 0$ .

La fonction  $f$  est donc **croissante** sur  $] -1 ; e - 1]$ , puis **décroissante** sur  $[e - 1 ; +\infty[$ . Elle admet un maximum en  $x = e - 1$  :

$$f(e - 1) = 1 + 4 \ln(e)/e = 1 + 4/e \approx 2,47.$$

| $x$               | $-1$      |            | $e - 1$   |            | $+\infty$ |
|-------------------|-----------|------------|-----------|------------|-----------|
| signe de $f'(x)$  |           | +          | 0         | -          |           |
| variations de $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $1 + 4/e$ | $\searrow$ | 1         |

4. Montrer que l'équation  $f(x) = 1,5$  admet une unique solution dans l'intervalle  $[2 ; +\infty[$ . En donner une valeur arrondie à  $10^{-1}$ .

4. Sur  $[2 ; +\infty[$ , la fonction  $f$  est **continue** et **strictement décroissante** (car  $2 > e - 1$ ).

Elle réalise donc une bijection de  $[2 ; +\infty[$  sur  $]1 ; f(2)]$ , avec :

$$f(2) = 1 + 4 \ln 3 / 3 \approx 2,46.$$

Comme  $1 < 1,5 \leq 2,46$ , le **théorème des valeurs intermédiaires** (version stricte, pour une fonction strictement monotone) assure que l'équation  $f(x) = 1,5$  admet une **unique solution**  $\alpha$  dans  $[2 ; +\infty[$ .

Par balayage à la calculatrice :

$$f(25) \approx 1,5013 \text{ et } f(25,1) \approx 1,4998,$$

donc  $25 < \alpha < 25,1$ , et  $\alpha \approx 25,1$  arrondi à  $10^{-1}$ .

(La décroissance est très lente : c'est normal, la courbe s'approche de son asymptote  $y = 1$  en  $1/x$  à peu près.)

5. ○ **a.** Montrer que l'intégrale de  $\ln(x + 1)/(x + 1)$  entre 0 et 2 est égale à  $(1/2)(\ln 3)^2$ .  
 ○ **b.** En déduire l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction  $f$ , l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $x = 2$ .

**5. a.** On reconnaît une forme  $u' \times u$  avec  $u(x) = \ln(x + 1)$ , dont la dérivée est  $u'(x) = 1/(x + 1)$  :

$$\ln(x + 1)/(x + 1) = u(x) \times u'(x).$$

Une primitive est donc  $(1/2)u(x)^2 = (1/2)(\ln(x + 1))^2$ . D'où :

$$\begin{aligned} \int_0^2 \ln(x+1)/(x+1) \, dx &= \left[ (1/2)(\ln(x + 1))^2 \right]_0^2 \\ &= (1/2)(\ln 3)^2 - (1/2)(\ln 1)^2 \\ &= (1/2)(\ln 3)^2. \checkmark \end{aligned}$$

(On peut aussi poser le changement de variable  $X = \ln(x + 1)$ .)

**5. b.** Sur  $[0 ; 2]$ , la fonction  $f$  est positive : d'après le tableau de variation, son minimum sur cet intervalle est  $f(0) = 1 > 0$ .

L'aire cherchée, en unité d'aire, est donc l'intégrale de  $f$  entre 0 et 2 :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 f(x) \, dx = \int_0^2 \left[ 1 + 4 \times \ln(x+1)/(x+1) \right] \, dx \\ A &= \int_0^2 1 \, dx + 4 \times \int_0^2 \ln(x+1)/(x+1) \, dx \\ A &= 2 + 4 \times (1/2)(\ln 3)^2 \end{aligned}$$

$$A = 2 + 2(\ln 3)^2 \text{ unités d'aire, soit environ } 4,41 \text{ u.a.}$$