



P U L S A R S

CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Baccalauréat général 2025 — Mathématiques, spécialité (jour 1)

SESSION Session 2025 — 17 juin 2025	NIVEAU Terminale	DURÉE 4 h	BARÈME 20 points
---	----------------------------	---------------------	----------------------------

Corrigé rédigé par Pulsars. Les lectures graphiques sont signalées comme telles : elles dépendent de la figure du sujet, que ce document ne reproduit pas. Le sujet original reste téléchargeable sur pulsars.science.

On compte quatre groupes sanguins dans l'espèce humaine : A, B, AB et O.

Chaque groupe sanguin peut présenter un facteur rhésus. Lorsqu'il est présent, on dit que le rhésus est positif, sinon on dit qu'il est négatif.

Au sein de la population française, on sait que :

- 45 % des individus appartiennent au groupe A, et parmi eux 85 % sont de rhésus positif ;
- 10 % des individus appartiennent au groupe B, et parmi eux 84 % sont de rhésus positif ;
- 3 % des individus appartiennent au groupe AB, et parmi eux 82 % sont de rhésus positif.

On choisit au hasard une personne dans la population française. On désigne par :

- A l'évènement « la personne choisie est de groupe sanguin A » ;
- B l'évènement « la personne choisie est de groupe sanguin B » ;
- AB l'évènement « la personne choisie est de groupe sanguin AB » ;
- O l'évènement « la personne choisie est de groupe sanguin O » ;
- R l'évènement « la personne choisie a un facteur rhésus positif ».

Pour un évènement quelconque E, on note $\bar{E}$ l'évènement contraire de E et $P(E)$ la probabilité de E.

1. Recopier l'arbre pondéré du sujet en complétant les dix pointillés. (L'arbre figure dans le PDF : quatre branches A, B, AB, O, puis R / $\bar{R}$ sur chacune.)

1. Les quatre groupes forment une partition de la population, donc :

$$P(O) = 1 - (0,45 + 0,10 + 0,03) = 1 - 0,58 = 0,42.$$

Les dix pointillés sont :

- premier niveau : $P(A) = 0,45$, $P(B) = 0,10$, $P(AB) = 0,03$, $P(O) = 0,42$;
- branches issues de A : $P_A(R) = 0,85$ et $P_A(\bar{R}) = 0,15$;
- branches issues de B : $P_B(R) = 0,84$ et $P_B(\bar{R}) = 0,16$;
- branches issues de AB : $P_{AB}(R) = 0,82$ et $P_{AB}(\bar{R}) = 0,18$.

2. Montrer que $P(B \cap R) = 0,084$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Par la formule des probabilités composées :

$$P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = 0,10 \times 0,84 = 0,084. \checkmark$$

Interprétation : 8,4 % des Français sont à la fois de groupe sanguin B et de rhésus positif.

3. On précise que $P(R) = 0,8397$. Montrer que $P_0(R) = 0,83$.

3. Les événements A , B , AB , O forment une partition de l'univers. D'après la **formule des probabilités totales** :

$$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(AB \cap R) + P(O \cap R).$$

On calcule les trois premiers termes :

- $P(A \cap R) = 0,45 \times 0,85 = 0,3825$;
- $P(B \cap R) = 0,084$ (question 2) ;
- $P(AB \cap R) = 0,03 \times 0,82 = 0,0246$.

Leur somme vaut $0,3825 + 0,084 + 0,0246 = 0,4911$. Donc :

$$P(O \cap R) = 0,8397 - 0,4911 = 0,3486.$$

D'où :

$$P_0(R) = P(O \cap R) / P(O) = 0,3486 / 0,42 = 0,83. \checkmark$$

4. On dit qu'un individu est « donneur universel » lorsque son sang peut être transfusé à toute personne sans risque d'incompatibilité. Le groupe O de rhésus négatif est le seul vérifiant cette caractéristique.

Montrer que la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel est de $0,0714$.

4. Un donneur universel est de groupe O et de rhésus négatif : l'évènement est $O \cap \bar{R}$.

$$P_0(\bar{R}) = 1 - P_0(R) = 1 - 0,83 = 0,17.$$

$$P(O \cap \bar{R}) = P(O) \times P_0(\bar{R}) = 0,42 \times 0,17 = 0,0714. \checkmark$$

Environ **7,1 %** de la population française est donneur universel.

5. Lors d'une collecte de sang, on choisit un échantillon de 100 personnes dans la population d'une ville française. Cette population est suffisamment grande pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 personnes associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

- a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- b. Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon.
- c. Montrer que l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à 7,14 et que sa variance $V(X)$ est égale à 6,63 à 10^{-2} près.

5. a. L'expérience consiste à répéter 100 fois, de façon **identique et indépendante** (le tirage est assimilé à un tirage avec remise), une épreuve de Bernoulli dont le succès est « la personne est donneur universel », de probabilité $p = 0,0714$.

X compte le nombre de succès : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,0714$.

5. b. À la calculatrice :

$$P(X \leq 7) \approx 0,577.$$

Il y a donc environ 57,7 % de chances de compter au plus 7 donneurs universels parmi les 100 personnes.

5. c. Pour une loi binomiale de paramètres n et p :

$$E(X) = np = 100 \times 0,0714 = 7,14. \checkmark$$

$$V(X) = np(1 - p) = 100 \times 0,0714 \times 0,9286 = 6,630\dots, \text{ soit } 6,63 \text{ à } 10^{-2} \text{ près. } \checkmark$$

6. Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées $1, 2, 3, \dots, N$ où N est un entier naturel non nul.

On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon. On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, ..., X_N pour la ville N .

On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à $7,14$ et la même variance égale à $6,63$.

On considère la variable aléatoire $M_N = (X_1 + X_2 + \dots + X_N) / N$.

- a. Que représente la variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice ?
- b. Calculer l'espérance $E(M_N)$.
- c. On désigne par $V(M_N)$ la variance de la variable aléatoire M_N . Montrer que $V(M_N) = 6,63/N$.
- d. Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P(7 < M_N < 7,28) \geq 0,95$.

6. a. M_N est la **moyenne du nombre de donneurs universels par échantillon de 100 personnes**, calculée sur les N villes retenues.

6. b. Par linéarité de l'espérance :

$$E(M_N) = (1/N) \times (E(X_1) + \dots + E(X_N)) = (1/N) \times N \times 7,14 = 7,14.$$

6. c. Les variables $X_1, \dots, X_N$ étant **indépendantes**, la variance de leur somme est la somme des variances. Avec $V(aT) = a^2V(T)$:

$$V(M_N) = (1/N^2) \times (V(X_1) + \dots + V(X_N)) = (1/N^2) \times N \times 6,63 = 6,63/N. \checkmark$$

6. d. L'encadrement $7 < M_N < 7,28$ s'écrit $|M_N - 7,14| < 0,14$, soit un écart à l'espérance strictement inférieur à $\delta = 0,14$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(|M_N - 7,14| \geq 0,14) \leq V(M_N)/\delta^2 = (6,63/N) / 0,0196.$$

En passant au complémentaire :

$$P(7 < M_N < 7,28) \geq 1 - 6,63 / (0,0196 N).$$

Il suffit que $1 - 6,63/(0,0196 N) \geq 0,95$, c'est-à-dire :

$$6,63 / (0,0196 N) \leq 0,05$$

$$N \geq 6,63 / (0,0196 \times 0,05) = 6,63 / 0,00098 \approx 6\,765,3.$$

La plus petite valeur entière est $N = 6\,766$.

Remarque : ce nombre dépasse le nombre de villes françaises de taille suffisante — c'est le signe que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, valable sans aucune hypothèse sur la loi, est très pessimiste. Elle donne une garantie, pas une estimation fine.

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé dans le sujet :

- la courbe représentative de f , notée C_f , sur l'intervalle $]0 ; 3]$;
- la droite T_A , tangente à C_f au point $A(1 ; 2)$;
- la droite T_B , tangente à C_f au point $B(e ; e)$.

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point $C(3 ; 0)$.

(La figure se trouve dans le PDF. Le domaine hachuré, utilisé en partie C, est délimité par la courbe C_f , la tangente T_B et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.)

Partie A : lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.

1. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A , qui passe par $A(1 ; 2)$ et $C(3 ; 0)$:

$$f'(1) = (0 - 2)/(3 - 1) = -2/2 = -1.$$

2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0 ; 3]$?

2. $f'(x) = 0$ signifie que la tangente à C_f au point d'abscisse x est **horizontale**.

Sur le graphique, la courbe présente un maximum local (aux alentours de $x \approx 0,4$) puis un minimum local (aux alentours de $x \approx 1,6$) : l'équation $f'(x) = 0$ admet donc **2 solutions** dans $]0 ; 3]$.

(La partie B le confirme : $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1 = 0$ donne $\ln x = 1/2$ ou $\ln x = -1$, soit $x = \sqrt{e} \approx 1,65$ et $x = 1/e \approx 0,37$, tous deux dans $]0 ; 3]$.)

3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

3. Au voisinage de $x = 0,2$, la courbe tourne sa concavité **vers le bas** (elle est située sous ses tangentes) : la fonction y est concave.

Donc $f''(0,2) < 0$.

Partie B : étude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x(2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2)$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$. En déduire que C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.

1. On calcule le discriminant de $2X^2 - 3X + 2$:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 < 0.$$

L'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$ n'admet aucune solution réelle.

De plus, le coefficient dominant 2 est positif, donc le trinôme est **strictement positif pour tout réel X** .

En particulier, pour tout $x > 0$, en posant $X = \ln x$: $2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 > 0$.

Comme $x > 0$, le produit $f(x) = x \times (2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2)$ est strictement positif, donc ne s'annule jamais : **C_f ne coupe pas l'axe des abscisses.**

2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$. On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.

2. Le trinôme $2X^2 - 3X + 2$ atteint son minimum en $X = 3/4$, et ce minimum vaut :

$$2 \times (9/16) - 3 \times (3/4) + 2 = 9/8 - 9/4 + 2 = 7/8.$$

Donc pour tout $x > 0$: $2(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2 \geq 7/8$, et par conséquent :

$$f(x) \geq (7/8)x.$$

Or $(7/8)x \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. Par **comparaison** :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

3. On admet que pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.
- a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, $f''(x) = (1/x)(4 \ln x + 1)$.
 - b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.
 - c. Montrer que la courbe C_f est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

3. a. On dérive $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.

La dérivée de $(\ln x)^2$ est $2 \times \ln x \times (1/x)$ (dérivée de u^2 avec $u = \ln x$), et celle de $\ln x$ est $1/x$:

$$f''(x) = 2 \times 2 \ln x \times (1/x) + 1/x = (4 \ln x)/x + 1/x = (1/x)(4 \ln x + 1). \checkmark$$

3. b. Sur $]0 ; +\infty[$, $1/x > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $4 \ln x + 1$:

$$4 \ln x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1/4 \Leftrightarrow x \geq e^{(-1/4)}.$$

Donc :

- f est **concave** sur $]0 ; e^{(-1/4)}]$;
- f est **convexe** sur $[e^{(-1/4)} ; +\infty[$.

La dérivée seconde s'annule en changeant de signe en $x = e^{(-1/4)}$: la courbe C_f admet un **point d'inflexion d'abscisse $e^{(-1/4)}$** (soit environ $0,78$).

3. c. On a $e^{(-1/4)} \approx 0,78 < 1$, donc l'intervalle $[1 ; +\infty[$ est inclus dans $[e^{(-1/4)} ; +\infty[$, où la fonction f est **convexe**.

Or une fonction convexe sur un intervalle a sa courbe **au-dessus de chacune de ses tangentes** sur cet intervalle.

T_B étant une tangente à C_f (au point $B(e ; e)$, avec $e \in [1 ; +\infty[$), la courbe C_f est bien **au-dessus de T_B** sur $[1 ; +\infty[$.

Partie C : calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_B a pour équation réduite $y = 2x - e$.

1. La tangente au point $B(e ; e)$ a pour équation $y = f'(e)(x - e) + f(e)$.

$$f'(e) = 2(\ln e)^2 + \ln e - 1 = 2 \times 1 + 1 - 1 = 2.$$

$f(e) = e(2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 2) = e \times 1 = e$ (ce qui confirme que $B(e ; e)$ est bien sur la courbe).

D'où : $y = 2(x - e) + e = 2x - 2e + e$, soit **$y = 2x - e$** . $\checkmark$

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale de $x \ln x$ entre 1 et e est égale à $(e^2 + 1)/4$.

2. Intégration par parties, avec :

- $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = 1/x$;
- $v'(x) = x$ et $v(x) = x^2/2$.

Ces fonctions sont dérivables et à dérivées continues sur $[1 ; e]$.

$$\begin{aligned}\int_1^e x \ln x \, dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} \, dx \\&= \left(\frac{e^2}{2} \times 1 - \frac{1}{2} \times 0 \right) - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx \\&= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e \\&= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) \\&= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{(e^2 + 1)}{4}. \checkmark\end{aligned}$$

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f , la tangente T_B , et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

On admet que l'intégrale de $x(\ln x)^2$ entre 1 et e vaut $(e^2 - 1)/4$.

En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$ en unité d'aire.

3. D'après la question B.3.c, C_f est au-dessus de T_B sur $[1 ; e]$. L'aire du domaine hachuré est donc :

$$\mathcal{A} = \int_1^e [f(x) - (2x - e)] \, dx.$$

Première intégrale. En développant $f(x) = 2x(\ln x)^2 - 3x \ln x + 2x$:

$$\begin{aligned}\int_1^e f(x) \, dx &= 2 \times (e^2 - 1)/4 - 3 \times (e^2 + 1)/4 + 2 \times \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e \\&= (e^2 - 1)/2 - 3(e^2 + 1)/4 + (e^2 - 1).\end{aligned}$$

En réduisant au dénominateur commun 4 :

$$\begin{aligned}&= \left[\frac{2(e^2 - 1) - 3(e^2 + 1) + 4(e^2 - 1)}{4} \right] \\&= \left[\frac{2e^2 - 2 - 3e^2 - 3 + 4e^2 - 4}{4} \right] \\&= \frac{(3e^2 - 9)}{4}.\end{aligned}$$

Seconde intégrale.

$$\int_1^e (2x - e) \, dx = \left[x^2 - ex \right]_1^e = (e^2 - e^2) - (1 - e) = e - 1.$$

Différence.

$$\mathcal{A} = \frac{(3e^2 - 9)}{4} - (e - 1) = \frac{(3e^2 - 9 - 4e + 4)}{4}$$

$$\mathcal{A} = \frac{(3e^2 - 4e - 5)}{4} \text{ unités d'aire, soit environ } 1,57 \text{ u.a.}$$

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(0 ; i, j, k)$.

1. On considère les points $A(-1 ; 0 ; 5)$ et $B(3 ; 2 ; -1)$.

Affirmation 1 : une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$x = 3 - 2t, y = 2 - t, z = -1 + 3t, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 1 : VRAIE.

Une représentation paramétrique décrit la droite (AB) si (i) son vecteur directeur est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et (ii) elle passe par un point de (AB) .

$$\overrightarrow{AB}(3 - (-1) ; 2 - 0 ; -1 - 5), \text{ soit } \overrightarrow{AB}(4 ; 2 ; -6).$$

Le vecteur directeur proposé est $u(-2 ; -1 ; 3)$. Or $\overrightarrow{AB} = -2u$: les vecteurs sont bien **colinéaires**.

Pour $t = 0$, la représentation donne le point $(3 ; 2 ; -1)$, c'est-à-dire le point B , qui appartient à (AB) .

Les deux conditions sont réunies : c'est bien une représentation paramétrique de (AB) .

Affirmation 2 : le vecteur $n(5 ; -2 ; 1)$ est normal au plan (OAB) .

2. On considère :

- la droite d de représentation paramétrique $x = 15 + k, y = 8 - k, z = -6 + 2k$, avec $k \in \mathbb{R}$;
- la droite d' de représentation paramétrique $x = 1 + 4s, y = 2 + 4s, z = 1 - 6s$, avec $s \in \mathbb{R}$.

Affirmation 2 : FAUSSE.

Un vecteur normal au plan (OAB) doit être orthogonal à **deux** vecteurs non colinéaires du plan, par exemple $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

$$\overrightarrow{OA}(-1 ; 0 ; 5) : n \cdot \overrightarrow{OA} = 5 \times (-1) + (-2) \times 0 + 1 \times 5 = -5 + 0 + 5 = 0. \checkmark$$

$$\overrightarrow{OB}(3 ; 2 ; -1) : n \cdot \overrightarrow{OB} = 5 \times 3 + (-2) \times 2 + 1 \times (-1) = 15 - 4 - 1 = 10 \neq 0. \times$$

Le vecteur n n'est pas orthogonal à $\overrightarrow{OB}$, donc il n'est **pas** normal au plan (OAB) .

Affirmation 3 : les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + z + 1 = 0$.

Affirmation 3 : FAUSSE.

Les vecteurs directeurs sont $u(1 ; -1 ; 2)$ pour d et $v(4 ; 4 ; -6)$ pour d' .

Ils ne sont pas colinéaires ($4/1 = 4$ mais $4/(-1) = -4$) : les droites ne sont pas parallèles.

Cherchons un point commun en résolvant :

$$15 + k = 1 + 4s \quad (1) ; 8 - k = 2 + 4s \quad (2) ; -6 + 2k = 1 - 6s \quad (3).$$

De (1) : $k = 4s - 14$. De (2) : $k = 6 - 4s$.

Donc $4s - 14 = 6 - 4s$, soit $8s = 20$ et $s = 2,5$, d'où $k = 6 - 10 = -4$.

Vérifions (3) avec ces valeurs :

- membre de gauche : $-6 + 2 \times (-4) = -14$;
- membre de droite : $1 - 6 \times 2,5 = 1 - 15 = -14$. ✓

Le système admet une solution : les droites d et d' sont **sécantes** au point de coordonnées $(11 ; 12 ; -14)$.

Deux droites sécantes sont toujours coplanaires : l'affirmation est donc fausse.

Affirmation 4 : la distance du point $C(2 ; -1 ; 2)$ au plan $\mathcal{P}$ est égale à $2\sqrt{3}$.

Affirmation 4 : VRAIE.

Pour un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et un point $C(x_C ; y_C ; z_C)$, la distance est :

$$\text{dist}(C, \mathcal{P}) = |ax_C + by_C + cz_C + d| / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Ici $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 1$ et $C(2 ; -1 ; 2)$:

$$\text{dist}(C, \mathcal{P}) = |2 - (-1) + 2 + 1| / \sqrt{1 + 1 + 1} = 6/\sqrt{3}.$$

En rationalisant : $6/\sqrt{3} = 6\sqrt{3}/3 = 2\sqrt{3}$. ✓

(On peut aussi retrouver ce résultat sans formule, en cherchant le projeté orthogonal H de C sur $\mathcal{P}$ à l'aide de la droite passant par C et de vecteur directeur normal $(1 ; -1 ; 1)$.)

Exercice 4 — Suite et équation différentielle : croissance de la posidonie 5 points

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n , on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024 + n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n.$$

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.

1. Le premier juillet 2025 correspond à $n = 1$:

$$u_1 = -0,02 \times 1^2 + 1,3 \times 1 = -0,02 + 1,3 = 1,28.$$

La posidonie devrait recouvrir **1,28 hectare**.

2. On note h la fonction définie sur $[0 ; 20]$ par $h(x) = -0,02x^2 + 1,3x$. On admet que h est croissante sur $[0 ; 20]$.
- a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.
 - c. Justifier que $L = 15$.

2. a. Montrons par récurrence la propriété P_n : « $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$ ».

Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1,28$. On a bien $1 \leq 1 \leq 1,28 \leq 20$, donc P_0 est vraie.

Hérédité : supposons P_n vraie pour un entier n fixé, c'est-à-dire $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

La fonction h est croissante sur $[0 ; 20]$, et tous ces nombres appartiennent à $[0 ; 20]$. En appliquant h , l'ordre est conservé :

$$h(1) \leq h(u_n) \leq h(u_{n+1}) \leq h(20).$$

Or $h(u_n) = u_{n+1}$ et $h(u_{n+1}) = u_{n+2}$, avec :

- $h(1) = -0,02 + 1,3 = 1,28$;
- $h(20) = -0,02 \times 400 + 1,3 \times 20 = -8 + 26 = 18$.

Donc $1,28 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 18$.

Comme $1 \leq 1,28$ et $18 \leq 20$, on obtient $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 20$: P_{n+1} est vraie.

Conclusion : par récurrence, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.

2. b. L'encadrement précédent montre que la suite (u_n) est **croissante** (car $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n) et **majorée par 20**.

D'après le théorème de la convergence monotone, elle **converge** vers une limite L .

2. c. La fonction h est continue sur $[0 ; 20]$ (c'est un polynôme) et $u_{n+1} = h(u_n)$. En passant à la limite :

$$L = h(L), \text{ soit } L = -0,02L^2 + 1,3L.$$

$$0,02L^2 - 0,3L = 0$$

$$L(0,02L - 0,3) = 0$$

$$L = 0 \text{ ou } L = 0,3/0,02 = 15.$$

Or la suite est croissante à partir de $u_0 = 1$, donc $L \geq 1 > 0$: la valeur $L = 0$ est à écarter.

Donc $L = 15$: la posidonie tend à recouvrir 15 des 20 hectares de la zone.

3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.
- a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.
 - b. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil():  
    n = 0  
    u = 1  
    while ..... :  
        n = .....  
        u = .....  
    return n
```

3. a. La suite (u_n) est croissante et converge vers 15.

Si elle ne dépassait jamais 14, elle serait majorée par 14, et sa limite vérifierait alors $L \leq 14$, ce qui contredit $L = 15$.

Elle dépasse donc nécessairement 14 à partir d'un certain rang.

3. b.

```
def seuil():  
    n = 0  
    u = 1  
    while u <= 14 :  
        n = n+1  
        u = -0.02*u**2 + 1.3*u  
    return n
```

Tant que la superficie n'a pas dépassé 14 ha, on avance d'une année (n) et on calcule la superficie suivante (u).

En exécutant l'algorithme, on obtient $n = 18$ (avec $u_{18} \approx 14,12$ et $u_{17} \approx 13,79$).

D'après ce modèle, la posidonie dépassera 14 hectares **18 ans après le premier juillet 2024**, soit au premier juillet **2042**.

Partie B : étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t , en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$;
- f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$;
- f est solution sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle $(E_1) : y' = 0,02y(15 - y)$.

On admet qu'une telle fonction f existe ; le but de cette partie est d'en déterminer une expression. On note f' la fonction dérivée de f .

1. Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = 1/f(t)$. Montrer que g est solution de l'équation différentielle $(E_2) : y' = -0,3y + 0,02$.

1. La fonction $g = 1/f$ est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ car f l'est et ne s'annule pas. Sa dérivée est :

$$g'(t) = -f'(t)/f(t)^2.$$

Or f est solution de (E_1) , donc $f'(t) = 0,02f(t)(15 - f(t))$. En remplaçant :

$$g'(t) = -0,02f(t)(15 - f(t)) / f(t)^2 = -0,02(15 - f(t))/f(t)$$

$$g'(t) = -0,3/f(t) + 0,02f(t)/f(t)$$

$$g'(t) = -0,3 g(t) + 0,02.$$

La fonction g est donc bien solution de $(E_2) : y' = -0,3y + 0,02$. ✓

2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2) .

2. (E_2) est du type $y' = ay + b$ avec $a = -0,3$ et $b = 0,02$. Ses solutions sont les fonctions :

$t \mapsto Ke^{(-0,3t)} - b/a = Ke^{(-0,3t)} + 0,02/0,3$, soit $t \mapsto Ke^{(-0,3t)} + 1/15$, avec $K \in \mathbb{R}$.

3. En déduire que pour tout $t \in [0 ; +\infty[$: $f(t) = 15 / (14e^{(-0,3t)} + 1)$.

3. Comme $f(0) = 1$, on a $g(0) = 1/f(0) = 1$. Donc :

$$K + 1/15 = 1, \text{ d'où } K = 14/15.$$

$$\text{Ainsi } g(t) = (14/15)e^{(-0,3t)} + 1/15 = (14e^{(-0,3t)} + 1)/15.$$

Comme $f = 1/g$:

$$f(t) = 15 / (14e^{(-0,3t)} + 1) . \checkmark$$

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Quand $t \rightarrow +\infty$, on a $e^{(-0,3t)} \rightarrow 0$, donc $14e^{(-0,3t)} + 1 \rightarrow 1$ et :

$$\lim f(t) = 15/1 = 15.$$

Le modèle continu et le modèle discret donnent la même valeur limite : **15 hectares**.

5. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5. Résolvons $f(t) > 14$ sur $[0 ; +\infty[$. Le dénominateur $14e^{(-0,3t)} + 1$ est strictement positif, donc :

$$15/(14e^{(-0,3t)} + 1) > 14$$

$$15 > 14(14e^{(-0,3t)} + 1)$$

$$15 > 196e^{(-0,3t)} + 14$$

$$1 > 196e^{(-0,3t)}$$

$$e^{(-0,3t)} < 1/196.$$

La fonction $\ln$ étant strictement croissante :

$$-0,3t < -\ln(196), \text{ soit } t > \ln(196)/0,3 \approx 17,59.$$

Interprétation : d'après le modèle continu, la posidonie recouvrira plus de 14 hectares au bout d'environ **17,6 années** après le premier juillet 2024, c'est-à-dire au cours de l'année **2042**.

Les deux modèles concordent : le modèle discret donnait le premier juillet 2042, le modèle continu le début de l'année 2042.